

CHƯƠNG II. MẶT NÓN, MẶT TRỤ, MẶT CẦU

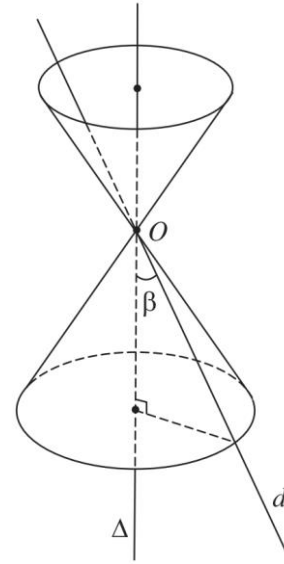
§1. KHÁI NIỆM VỀ MẶT TRÒN XOAY

I. Mặt nón tròn xoay.

1. Định nghĩa.

Trong mặt phẳng (P) cho hai đường thẳng d và Δ cắt nhau tại điểm O và tạo thành góc β với $0^\circ < \beta < 90^\circ$. Khi quay mặt phẳng (P) xung quanh Δ thì đường thẳng d sinh ra một mặt tròn xoay gọi là mặt nón tròn xoay (gọi tắt là mặt nón) đỉnh O .

- Đường thẳng Δ gọi là trục.
- Đường thẳng d gọi là đường sinh.
- Góc 2β gọi là góc ở đỉnh.



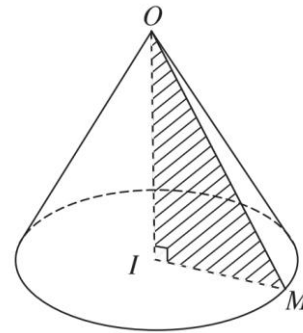
2. Hình nón tròn xoay và khối nón tròn xoay

Cho tam giác OIM vuông tại I . Khi quay tam giác đó xung quanh cạnh góc vuông OI thì đường gấp khúc OMI tạo thành một hình gọi là **hình nón tròn xoay**, gọi tắt là **hình nón**.

Khi đó:

- Đường sinh $l = OM$.
- Đường cao $h = OI$.
- Bán kính đáy $r = IM$

Khối nón là phần không gian được giới hạn bởi một hình nón kể cả hình nón đó.

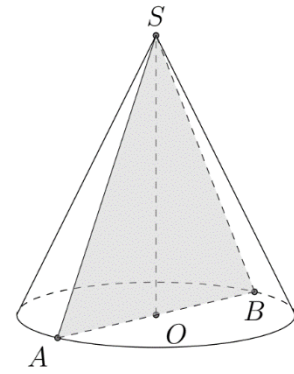


3. Diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của hình nón và thể tích khối nón.

Cho hình nón có đường sinh l , chiều cao h và bán kính đáy r .	
Mối liên hệ giữa đường sinh, đường cao và bán kính đáy.	$l^2 = h^2 + r^2$
Diện tích xung quanh.	$S_{xq} = \pi rl$
Diện tích đáy (hình tròn).	$S_{\text{đáy}} = \pi r^2$
Diện tích toàn phần.	$S_{tp} = S_{xq} + S_{\text{đáy}} = \pi rl + \pi r^2$
Thể tích.	$V = \frac{1}{3} S_{\text{đáy}} \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

Lưu ý:

Thiết diện qua trục của hình nón là tam giác SAB cân tại S.



Ví dụ 1: Trong không gian, cho tam giác vuông ABC tại A , $AB = a\sqrt{3}$ và $AC = a$. Tính diện tích toàn phần của hình nón nhận được khi quay tam giác ABC xung quanh trục AB .

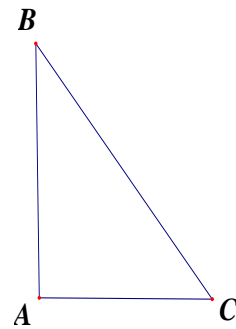
Lời giải

Hình nón có:

- Đường sinh $l = BC$.
- Đường cao $h = AB = a\sqrt{3}$.
- Bán kính đáy $r = AC = a$.

Ta có: $l^2 = h^2 + r^2 \Leftrightarrow l^2 = a^2 + (a\sqrt{3})^2 \Rightarrow l = 2a$.

Vậy $S_p = \pi r l + \pi r^2 \Leftrightarrow S_p = \pi \cdot a \cdot 2a + \pi a^2 = 3\pi a^2$



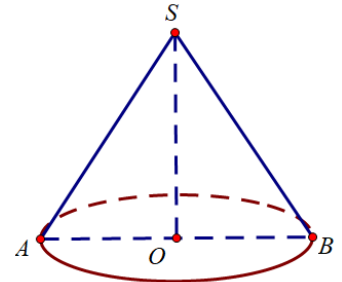
Ví dụ 2: Một hình nón có thiết diện qua trục là một tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng a . Tính diện tích xung quanh của hình nón.

Lời giải

Ta có thiết diện qua trục của hình nón là tam giác SAB vuông cân tại S .

Khi đó

- Cạnh góc vuông là $SA \Rightarrow$ đường sinh $l = SA = a$
- Bán kính đáy $r = OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$
- Vậy diện tích xung quanh của hình nón là $S_{xq} = \pi r l = \pi \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a = \frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{2}$.



Ví dụ 3: Cho hình nón có độ dài đường sinh bằng 25 và bán kính đường tròn đáy bằng 15. Tính thể tích của khối nón đó.

Lời giải

Hình nón có:

- Đường sinh $l = 25$
- Bán kính đáy $r = 15$
- Đường cao $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20$

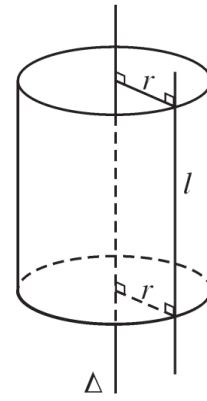
Vậy thể tích khối nón là $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 15^2 \cdot 20 = 1500\pi$.

II. Mặt trụ tròn xoay.

1. Định nghĩa.

Trong mặt phẳng (P) cho hai đường thẳng Δ và l song song với nhau, cách nhau một khoảng bằng r . Khi quay mặt phẳng (P) xung quanh Δ thì đường thẳng l sinh ra một mặt tròn xoay được gọi là mặt trụ tròn xoay, gọi tắt là mặt trụ.

- Đường thẳng Δ gọi là trục.
- Đường thẳng l là đường sinh.
- r là bán kính của mặt trụ đó.

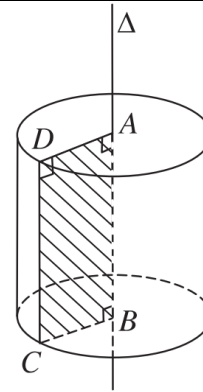


2. Hình trụ tròn xoay và khối trụ tròn xoay

Ta xét hình chữ nhật $ABCD$. Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ xung quanh đường thẳng chứa một cạnh nào đó, chẳng hạn cạnh AB thì đường gấp khúc $ADCB$ sẽ tạo thành một hình gọi là **hình trụ tròn xoay**, hay gọi tắt là **hình trụ**.

- Đường sinh $l = CD$.
- Đường cao $h = AB$.
- Bán kính đáy $r = BC$.

Khối trụ là phần không gian được giới hạn bởi một hình trụ kể cả hình trụ đó.

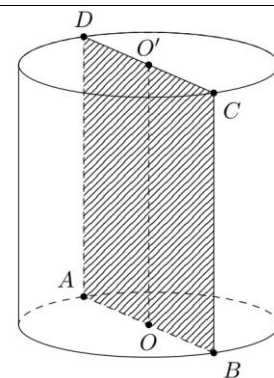


3. Diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của hình trụ và thể tích khối trụ.

Cho hình trụ có đường sinh l , chiều cao h và bán kính đáy r .	
Mối liên hệ giữa đường sinh và đường cao.	$l = h$
Diện tích xung quanh.	$S_{xq} = 2\pi rl$
Diện tích đáy (hình tròn).	$S_{\text{đáy}} = \pi r^2$
Diện tích toàn phần.	$S_{tp} = S_{xq} + 2S_{\text{đáy}} = 2\pi rl + 2\pi r^2$
Thể tích.	$V = S_{\text{đáy}} \cdot h = \pi r^2 h$

Lưu ý:

Thiết diện qua trục của hình trụ là hình chữ nhật $ABCD$.



Ví dụ 1: Cho hình trụ có bán kính đáy $r = 8$ và độ dài đường sinh $l = 3$. Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình trụ đã cho.

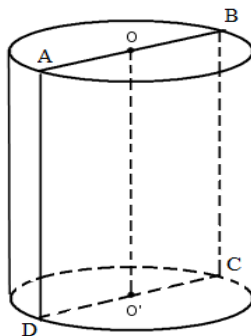
Lời giải

$$\text{Diện tích xung quanh của hình trụ } S_{xq} = 2\pi rl = 48\pi$$

$$\text{Diện tích toàn phần của hình trụ } S_{tp} = 2\pi rl + 2\pi r^2 = 176\pi$$

Ví dụ 2: Cho hình trụ có bán kính đáy bằng 3. Biết rằng khi cắt hình trụ đã cho bởi một mặt phẳng qua trục, thiết diện thu được là một hình vuông. Tính diện tích của khối trụ.

Lời giải



Giả sử thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông $ABCD$.

Theo giả thiết ta có bán kính đáy của hình trụ $r = 3 \Rightarrow h = AD = DC = 2r = 6 = l$.

Vậy thể tích của khối trụ là: $V = \pi r^2 h = \pi \cdot (3a)^2 \cdot 6a = 54\pi a^3$.

BÀI TẬP

Câu 1. Cho khối nón có bán kính đáy $r = 2$, chiều cao $h = \sqrt{3}$. Thể tích của khối nón là

- A. $\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{4\pi}{3}$. C. $4\pi\sqrt{3}$. D. $\frac{4\pi\sqrt{3}}{3}$.

Câu 2. Cho khối nón có bán kính đáy R , độ dài đường sinh l . Thể tích khối nón là

- A. $\frac{1}{3}\pi R^2 \sqrt{l^2 - R^2}$. B. $\pi R^2 \sqrt{l^2 - R^2}$. C. $\pi R^2 l$. D. $\frac{1}{3}\pi R^2 l$.

Câu 3. Cho hình nón có bán kính đáy $r = 2$ và độ dài đường sinh $l = 7$. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

- A. $\frac{28\pi}{3}$. B. 14π . C. 28π . D. $\frac{14\pi}{3}$.

Câu 4. Cho hình nón có diện tích xung quanh bằng $3\pi a^2$ và bán kính đáy bằng a . Tính độ dài đường sinh l của hình nón đã cho.

- A. $l = 3a$. B. $l = 2\sqrt{2}a$. C. $l = \frac{3a}{2}$. D. $l = \frac{\sqrt{5}a}{2}$.

Câu 5. Tính thể tích của khối nón có chiều cao bằng 4 và độ dài đường sinh bằng 5.

- A. 36π . B. 12π . C. 48π . D. 16π .

Câu 6. Tính thể tích V của khối nón có diện tích hình tròn đáy là S và chiều cao là h .

- A. $V = \frac{4}{3}Sh$. B. $V = Sh$. C. $V = \frac{1}{3}Sh^2$. D. $V = \frac{1}{3}Sh$.

Câu 7. Cho khối nón có bán kính đáy $r = 2$ và chiều cao $h = 4$. Thể tích của khối nón đã cho bằng

- A. $\frac{16\pi}{3}$. B. $\frac{8\pi}{3}$. C. 16π . D. 8π .

Câu 8. Cho khối nón có đường kính đáy $d = 2\sqrt{2}$ và chiều cao $h = 4$. Tính thể tích V của khối nón đã cho.

- A. $V = \frac{8\pi}{3}$. B. $V = 16\sqrt{2}\pi$. C. $V = 8\pi$. D. $V = \frac{16\sqrt{2}\pi}{3}$.

Câu 9. Cho khối nón (N) có thể tích bằng 4π và chiều cao là 3. Tính bán kính đường tròn đáy của khối nón (N).

- A. 2. B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. C. 1. D. $\frac{4}{3}$.

Câu 10. Cho hình nón có đường sinh $l = 5$, bán kính đáy $r = 3$. Diện tích toàn phần của hình nón đó là:

- A. $S_{tp} = 15\pi$. B. $S_{tp} = 20\pi$. C. $S_{tp} = 22\pi$. D. $S_{tp} = 24\pi$.

Câu 11. Cho tam giác ABC vuông cân tại A , đường cao $AH = 4$. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón nhận được khi quay tam giác ABC quanh trục AH .

- A. $8\sqrt{2}\pi$. B. $4\sqrt{2}\pi$. C. $16\sqrt{2}\pi$. D. $32\sqrt{2}\pi$.

Câu 12. Cho khối (N) có bán kính đáy bằng 3 và diện tích xung quanh bằng 15π . Tính thể tích V của khối nón (N)

- A. $V = 60\pi$. B. $V = 20\pi$. C. $V = 36\pi$. D. $V = 12\pi$.

Câu 13. Cắt hình nón đỉnh S bởi một mặt phẳng đi qua trục, ta được một tam giác vuông cân, cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$. Thể tích V của khối nón bằng

- A. $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{6}$. B. $V = \frac{\pi a \sqrt{2}}{4}$. C. $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{12}$. D. $V = \frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{12}$.

Câu 14. Cắt một hình nón bằng một mặt phẳng đi qua trục của nó ta được thiết diện là một tam giác đều có cạnh bằng a . Tính thể tích của khối nón đó.

- A. $\frac{2\sqrt{3}\pi a^3}{9}$. B. $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{24}$. C. $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{8}$. D. $\sqrt{3}\pi a^3$.

Câu 15. Khi cắt khối nón (N) bằng một mặt phẳng qua trục của nó ta được thiết diện là một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $2\sqrt{3}a$. Tính thể tích V của khối nón (N).

- A. $V = \sqrt{6}\pi a^3$. B. $V = 3\sqrt{6}\pi a^3$. C. $V = \sqrt{3}\pi a^3$. D. $V = 3\sqrt{3}\pi a^3$.

Câu 16. Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm. Gọi V_1 là thể tích khối nón tạo thành khi quay tam giác ABC quanh cạnh AB và V_2 là thể tích khối nón tạo thành khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC . Khi đó tỉ số thể tích $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

- A. $\frac{4}{3}$. B. $\frac{16}{9}$. C. $\frac{3}{4}$. D. $\frac{9}{16}$.

Câu 17. Nếu tăng bán kính đáy của hình nón lên 4 lần và giảm chiều cao của hình nón đi 8 lần, thì thể tích khối nón tăng hay giảm bao nhiêu lần?

- A. Tăng 2 lần. B. Tăng 16 lần.
C. Giảm 2 lần. D. Giảm 16 lần.

Câu 18. Cho hình trụ có bán $r = 7$ và độ dài đường sinh $l = 3$. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

- A. 42π . B. 147π . C. 49π . D. 21π .

Câu 32. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$, $AD = 2a$. Thể tích của khối trụ tạo thành khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh cạnh AB bằng

- A. $4\pi a^3$. B. πa^3 . C. $2a^3$. D. a^3 .

Câu 33. Trong không gian, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 1$ và $AD = 2$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Quay hình chữ nhật đó xung quanh trục MN , ta được một hình trụ. Tính thể tích V của khối trụ tạo bởi hình trụ đó

- A. $\frac{\pi}{2}$. B. π . C. 2π . D. 4π .

Câu 34. Cho khối trụ có chu vi đáy bằng $4\pi a$ và độ dài đường cao bằng a . Thể tích của khối trụ đã cho bằng

- A. πa^2 . B. $\frac{4}{3}\pi a^3$. C. $4\pi a^3$. D. $16\pi a^3$.

Câu 35. Cho một khối trụ có diện tích xung quanh của khối trụ bằng 80π . Tính thể tích của khối trụ biết khoảng cách giữa hai đáy bằng 10.

- A. 160π . B. 400π . C. 40π . D. 64π .

Câu 36. Cho khối trụ có bán kính hình tròn đáy bằng r và chiều cao bằng h . Hỏi nếu tăng chiều cao lên 2 lần và tăng bán kính đáy lên 3 lần thì thể tích của khối trụ mới sẽ tăng lên bao nhiêu lần?

- A. 18 lần. B. 6 lần. C. 36 lần. D. 12 lần.