

ĐỀ CHÍNH THỨC

Bài 1. (4 điểm)

Giải các phương trình sau:

a) $\cos^4 x + \sin^6 x = \cos 2x$

b) $2\cos^3\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \sin 3x$

Bài 2. (3 điểm)

a) Tính: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3-2x} + x - 2}{2\sqrt{x} - 1 - x}$

b) Tìm số nguyên dương n sao cho: $2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + n.2^n = 2^{n+12}$.

Bài 3. (4 điểm)

a) Có bao nhiêu cách chia 100 cây bút chì cho 3 bạn sao cho mỗi bạn đều có ít nhất một cây bút chì?

b) An có 3 viên bi màu đỏ và 5 viên bi màu xanh. Bình có 4 viên bi màu đỏ, 3 viên bi màu vàng và 5 viên bi màu xanh. Mỗi người chọn ngẫu nhiên hai viên để cho người kia xem. Tính xác suất để cả 4 viên bi cùng một màu.

Bài 4. (3 điểm)

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{3\cos x - \sin x + 2}{2\sin x - \cos x - 3}$

Bài 5. (4 điểm)

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$, $ASB = 90^\circ$, $BSC = 60^\circ$,

$CSA = 120^\circ$ và H là trung điểm AC .

a) Chứng minh rằng : SH vuông góc với mặt phẳng (ABC) .

b) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) .

Bài 6. (2 điểm)

Trong một kỳ thi, tất cả học sinh của trường A và trường B đều có huy chương (hoặc vàng, hoặc bạc, hoặc đồng). Số học sinh đạt huy chương vàng của hai trường bằng nhau. Số phần trăm huy chương vàng của trường A bằng $\frac{5}{6}$ số phần trăm huy chương vàng của trường B. Tỷ số huy chương bạc của trường A so với huy chương bạc của trường B là $\frac{9}{2}$. Số phần trăm đạt huy chương bạc của cả hai trường là 20%. Nếu 50% số học sinh trường A đạt huy chương đồng thì có bao nhiêu phần trăm số học sinh trường B đạt huy chương vàng?

HẾT

ĐÁP ÁN

Bài 1. (4 điểm)

$$\text{a) } \cos^4 x + \sin^6 x = \cos 2x \Leftrightarrow \cos^4 x + \sin^6 x = \cos^4 x - \sin^4 x \quad (0,5\text{đ})$$

$$\Leftrightarrow \sin^6 x = -\sin^4 x \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \quad (1,5\text{đ})$$

$$\text{b) } 2\cos^3\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \sin 3x$$

$$\text{Đặt } t = \frac{\pi}{3} - x \text{ ta có } 2\cos^3 t = \sin(\pi - 3t) \Leftrightarrow 2\cos^3 t = \sin 3t \quad (0,5\text{đ})$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^3 t = 3\sin t - 4\sin^3 t \Leftrightarrow 2 = 3\tan t(1 + \tan^2 t) - 4\tan^3 t$$
$$\Leftrightarrow \tan^3 t - 3\tan t + 2 = 0 \Leftrightarrow \tan t = 1 \vee \tan t = -2 \quad (0,5\text{đ})$$

$$\tan t = 1 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} - k\pi \quad (0,5\text{đ})$$

$$\tan t = -2 \Leftrightarrow t = -\arctan 2 + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \arctan 2 - k\pi \quad (0,5\text{đ})$$

Bài 2. (3 điểm)

$$\text{a) Tính: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3-2x} + x - 2}{2\sqrt{x} - 1 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-2)^2 - (3-2x)}{x-2-\sqrt{3-2x}} \cdot \frac{2\sqrt{x} + 1 + x}{4x - (1+x)^2} \quad (0,5\text{đ})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{x} + 1 + x}{x-2-\sqrt{3-2x}} = 2 \quad (0,5\text{đ})$$

$$\text{b) Tìm số nguyên dương } n \text{ sao cho: } 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \dots + n \cdot 2^n = 2^{n+12} .$$

$$\text{Ta có } k \cdot 2^k = (k-1) \cdot 2^{k+1} - (k-2) \cdot 2^k, \quad \forall k \quad (0,5\text{đ})$$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^n k \cdot 2^k = \sum_{k=2}^n [(k-1) \cdot 2^{k+1} - (k-2) \cdot 2^k] = (n-1) \cdot 2^{n+1} \quad (1\text{đ})$$

$$\Rightarrow (n-1) \cdot 2^{n+1} = 2^{n+12} \Rightarrow n-1 = 2^{11} \Rightarrow n = 2049 \quad (0,5\text{đ})$$

Cách khác:

$$2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 2$$

$$2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 2^2$$

$$2^3 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 2^3$$

.....

$$2^n = 2^{n+1} - 2^n$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \dots + n \cdot 2^n = n \cdot 2^{n+1} - (2 + 2^2 + \dots + 2^n) - 2$$

$$= n \cdot 2^{n+1} - (2^{n+1} - 2) - 2 = (n-1) \cdot 2^{n+1}$$

$$\Rightarrow (n-1) \cdot 2^{n+1} = 2^{n+12} \Rightarrow n-1 = 2^{11} \Rightarrow n = 2049$$

Bài 3. (4 điểm)

- a) Có bao nhiêu cách chia 100 cây bút chì cho 3 bạn sao cho mỗi bạn đều có ít nhất một cây bút chì?

Giải

Dễ thấy rằng có $n-1$ cách chia n cây bút chì cho 2 bạn sao cho mỗi bạn đều có ít nhất một cây bút chì. (0,5đ)

Nếu bạn thứ nhất có 1 cây, thì có 98 cách chia cho 2 bạn còn lại.

Nếu bạn thứ nhất có 2 cây, thì có 97 cách chia cho 2 bạn còn lại.

Nếu bạn thứ nhất có 3 cây, thì có 96 cách chia cho 2 bạn còn lại.

...

Nếu bạn thứ nhất có 98 cây, thì có 1 cách chia cho 2 bạn còn lại. (0,5đ)

Như vậy số cách chia 100 cây bút cho 3 bạn là: $1 + 2 + \dots + 97 + 98 = \frac{98 \cdot 99}{2} = 4851$ (1đ)

- b) An có 3 viên bi màu đỏ và 5 viên bi màu xanh. Bình có 4 viên bi màu đỏ, 3 viên bi màu vàng và 5 viên bi màu xanh. Mỗi người chọn ngẫu nhiên hai viên bi để cho người kia xem. Tính xác suất để cả 4 viên bi cùng một màu.

Giải

Xác suất để cả 4 viên bi cùng màu đỏ: $\frac{C_3^2 \cdot C_4^2}{C_8^2 \cdot C_{12}^2} = \frac{18}{1848}$ (0,75đ)

Xác suất để cả 4 viên bi cùng màu xanh: $\frac{C_5^2 \cdot C_5^2}{C_8^2 \cdot C_{12}^2} = \frac{100}{1848}$ (0,75đ)

\Rightarrow Xác suất để cả 4 viên bi cùng một màu: $\frac{118}{1848} = \frac{59}{924} \approx 6,39\%$ (0,5đ)

Bài 4. (3 điểm)

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{3\cos x - \sin x + 2}{2\sin x - \cos x - 3}$ (*)

Giải

Ta có $2^2 + (-1)^2 = 5 < 3^2$ nên phương trình: $2\sin x - \cos x - 3 = 0$ vô nghiệm

\Rightarrow hàm số có tập xác định là \mathbb{R} . (0,5đ)

(*) $\Leftrightarrow (2y+1)\sin x - (y+3)\cos x = 3y+2$ (0,5đ)

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow (2y+1)^2 + (y+3)^2 \geq (3y+2)^2$ (0,5đ)

$\Leftrightarrow 4y^2 + 2y - 6 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq y \leq 1$ (1đ)

Vậy GTLN của y là 1 và GTNN của y là $-\frac{3}{2}$ (0,5đ)

Bài 5. (4 điểm)

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$, $ASB = 90^\circ$, $BSC = 60^\circ$, $CSA = 120^\circ$ và H là trung điểm AC .

a) Chứng minh rằng : SH vuông góc với mặt phẳng (ABC) .

b) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) .

Giải

a) Dùng định lý hàm cos ta tính được $AB = a\sqrt{2}, BC = a, CA = a\sqrt{3}$ (0,5đ)

$$CA^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow \Delta ABC \text{ vuông tại } B. \quad (0,5đ)$$

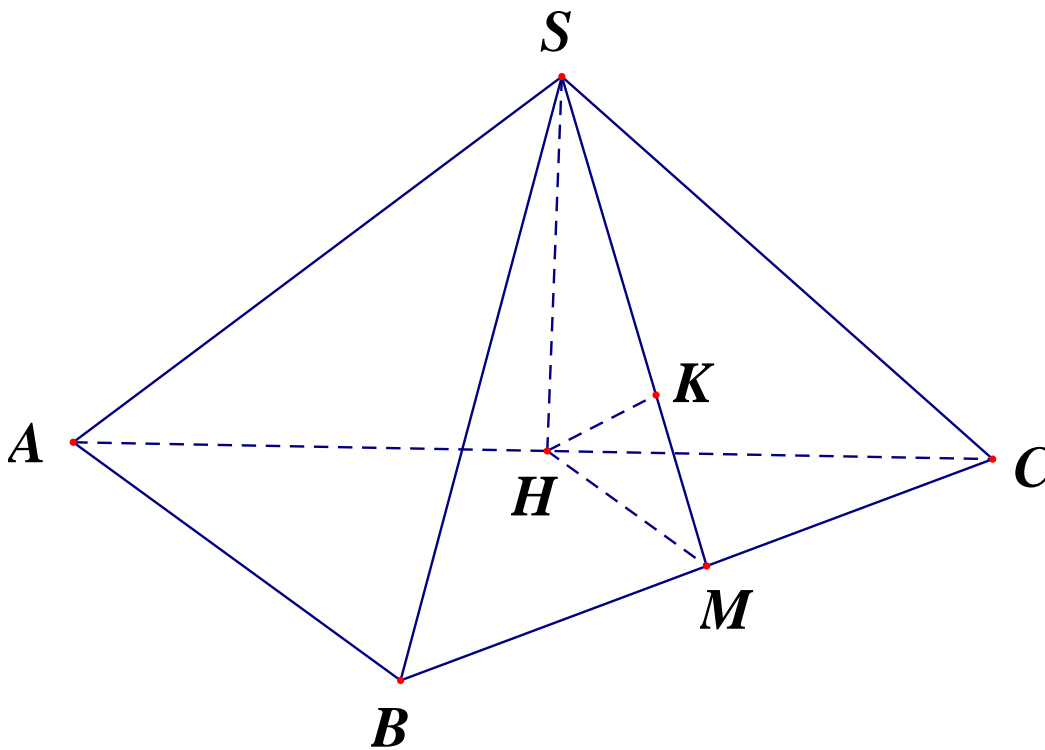
H là trung điểm của $CA \Rightarrow HA = HB = HC$ (0,5đ)

Mà $SA = SB = SC$ nên $SH \perp mp(ABC)$. (0,5đ)

b) Gọi M là trung điểm của $BC \Rightarrow HM \perp (BC) \Rightarrow BC \perp (SHM) \Rightarrow (SBC) \perp (SHM)$

Gọi K là hình chiếu của H lên $SM \Rightarrow HK \perp (SBC)$

hay HK là khoảng cách từ H đến $mp(SBC)$ (1đ)



Ta có $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HM^2} = \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{6}{a^2} \Rightarrow HK = \frac{a}{\sqrt{6}}$ (0,5đ)

H là trung điểm của AC suy ra $d(A, (SBC)) = 2HK = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ (0,5đ)

Bài 6. (2 điểm)

Trong một kỳ thi, tất cả học sinh của trường A và trường B đều có huy chương (hoặc vàng, hoặc bạc, hoặc đồng). Số học sinh đạt huy chương vàng của hai trường bằng nhau. Số phần trăm huy chương vàng của trường A bằng $\frac{5}{6}$ số phần trăm huy chương vàng của trường B. Tỉ số huy chương bạc của trường A so với huy chương bạc của trường B là $\frac{9}{2}$. Số phần trăm đạt huy chương bạc của cả hai trường là 20%. Nếu 50% số học sinh trường A đạt huy chương đồng thì có bao nhiêu phần trăm số học sinh trường B đạt huy chương vàng?

Giải

Gọi V_1, B_1, D_1 lần lượt là số huy chương vàng, bạc, đồng của trường A.

Gọi V_2, B_2, D_2 lần lượt là số huy chương vàng, bạc, đồng của trường B.

Theo đề bài ta có:

$$V_1 = V_2 \quad (1);$$

$$\frac{V_1}{V_1 + B_1 + D_1} : \frac{V_2}{V_2 + B_2 + D_2} = \frac{5}{6} \quad (2),$$

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{9}{2} \quad (3);$$

$$\frac{B_1 + B_2}{V_1 + B_1 + D_1 + V_2 + B_2 + D_2} = \frac{1}{5} \quad (4)$$

$$\frac{D_1}{V_1 + B_1 + D_1} = \frac{1}{2} \quad (5)$$

$$(1), (2) \Rightarrow V_2 + B_2 + D_2 = \frac{5}{6}(V_1 + B_1 + D_1) \quad (6)$$

$$(5), (6) \Rightarrow V_1 + B_1 + D_1 = 2D_1 \quad (7) \Rightarrow V_2 + B_2 + D_2 = \frac{5}{3}D_1$$

$$(4) \Rightarrow B_1 + B_2 = \frac{1}{5}(V_1 + B_1 + D_1 + V_2 + B_2 + D_2) = \frac{1}{5}(2D_1 + \frac{5}{3}D_1) = \frac{11}{15}D_1 \quad (8)$$

$$(3), (8) \Rightarrow B_1 = \frac{3}{5}D_1, \quad B_2 = \frac{2}{15}D_1$$

$$(7) \Rightarrow V_1 = D_1 - B_1 = \frac{2}{5}D_1 \Rightarrow V_2 = \frac{2}{5}D_1$$

$$\frac{V_2}{V_2 + B_2 + D_2} = \frac{\frac{2}{5}D_1}{\frac{5}{3}D_1} = \frac{6}{25} = 24\%$$

Vậy có 24% số học sinh trường B đạt huy chương vàng.

(2đ)