ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI CHI TIẾT
BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.A	3.A	4.B	5.D	6.D	7.A	8.B	9.D	10.A
11.B	12.D	13.C	14.D	15.B	16.C	17.D	18.B	19.A	20.B
21.B	22.B	23.B	24.D	25.D	26.A	27.B	28.A	29.B	30.C
31.C	32.D	33.D	34.C	35.D	36.B	37.C	38.A	39.D	40.D
41.B	42.B	43.C	44.D	45.A	46.B	47.B	48.A	49.B	50.A

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Trong một hộp bút gồm có 8 cây bút bi, 6 cây bút chì và 10 cây bút màu. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra một cây bút từ hộp bút đó?

A. 480. **B.** 24. **C.** 48. **D.** 60.

Lời giải

Chọn B

TH : chọn 1 cây bút bi có 8 cách

TH : chọn 1 cây bút chì có 6 cách

TH : chọn 1 cây bút màu có 10 cách

Áp dụng quy tắc cộng ta có số cách chọn ra một cây bút từ hộp bút đó là $8+6+10=24$.

Câu 2. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng tổng quát là $u_n=3n-2$. Tìm công sai d của cấp số cộng.

A. $d=3$. **B.** $d=2$. **C.** $d=-2$. **D.** $d=-3$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $u_2=3.2-2=4$

$u_1=3.1-2=1$

$d=u_2-u_1=3$

Cách khác : d = $u_{n+1}-u_n=3(n+1)-2-3n+2=3$ nên $d=3$ là công sai của cấp số cộng.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗		↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘		↗	$+\infty$

A. $(-1;\,0)$. **B.** $(-1;\,1)$. **C.** $(-\infty;\,-1)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Trong khoảng $(-1;\,0)$ đạo hàm $y'<0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;\,0)$.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho là:

A. -1. **<u>B</u>.** 3. **C.** 0 . **D.** -2.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào bảng biến thiên, giá trị cực đại của hàm số là $y=3$.

Câu 5. Cho hàm số $y=x^4-x^3+3$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số có 3 điểm cực trị.
B. Hàm số chỉ có đúng 2 cực trị.
C. Hàm số không có cực trị
<u>D</u>. Hàm số chỉ có đúng 1 điểm cực trị.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y'=4x^3-3x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0(kep) \\ x=\dfrac{3}{4} \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số đã cho có đúng 1 cực trị.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$+$	$\Vert$		
y	3	$\nearrow$	$+\infty \Vert -5$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty \Vert$		

Tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là:

A. 1. **B.** 4. **C.** 0. **<u>D</u>.** 3.

Lời giải

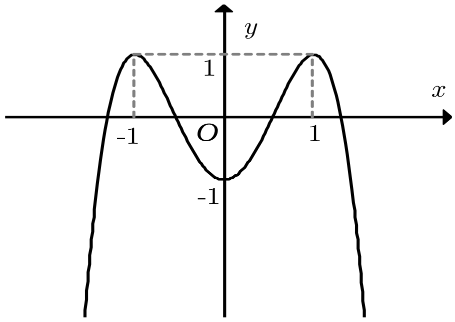
Chọn D

Tiệm cận ngang: $y=3$.

Tiệm cận đứng: $x=-1$; $x=1$.

Vậy tổng số tiệm cận là 3.

Câu 7. Đường cong trong hình dưới là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=-2x^4+4x^2-1$. **B.** $y=x^4-2x^2-1$. **C.** $y=-x^4+4x^2-1$. **D.** $y=-x^4+2x^2+1$.

Lời giải

Chọn A

Đầu tiên đồ thị quay xuống nên số a trước x mũ 4 âm do đó loại đáp án B

Kế đến với điểm $B(1;1)$ thay vào đáp án C, D đều sai. Vậy đáp án A đúng

Câu 8. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-2x^2+x-12$ và trục Ox là

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3-2x^2+x-12=0 \Leftrightarrow x=3$.

Vậy có một giao điểm duy nhất.

Câu 9. Cho a,b là các số thực dương bất kỳ. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\log(10ab)^2=2+\log(ab)^2$. **B.** $\log(10ab)^2=2(1+\log a+\log b)$.

C. $\log(10ab)^2=2+2\log(ab)$. **D.** $\log(10ab)^2=(1+\log a+\log b)^2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\log(10ab)^2=2\log(10ab)=2\left(\log 10+\log ab\right)=2+2\log(ab)$

$=2(1+\log a+\log b)=2+\log(ab)^2$.

Cách khác : Nếu em nào bấm máy **phải cẩn thận** vì máy hiểu $\log(10ab)^2=\left(\log(10ab)\right)^2$ **không như mình hiểu** nên bấm VD đáp án D là $\log\left((10ab)^2\right)-(1+\log a+\log b)^2$ **CALC** nhập A=0,1 và B=0,2 ta được kết quả khác 0 nên sai. Chọn D; còn các đáp án khác đúng

Câu 10. Tính đạo hàm của hàm số $f\left(x\right)=\mathrm{e}^{2x-3}$.

A. $f'\left(x\right)=2.\mathrm{e}^{2x-3}$. **B.** $f'\left(x\right)=-2.\mathrm{e}^{2x-3}$. **C.** $f'\left(x\right)=2.\mathrm{e}^{x-3}$. **D.** $f'\left(x\right)=\mathrm{e}^{2x-3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'\left(x\right)=\left(2x-3\right)'.\mathrm{e}^{2x-3}=2.\mathrm{e}^{2x-3}$.

Câu 11. Rút gọn $P=a^{\sqrt{2}}.\left(\dfrac{1}{a}\right)^{\sqrt{2}-1}, a>0$.

A. $a^{\sqrt{2}}$. **B.** a. **C.** $a^{2\sqrt{2}}$. **D.** $a^{1-\sqrt{2}}$.

Lời giải

Chọn B

$P=a^{\sqrt{2}}.\left(\dfrac{1}{a}\right)^{\sqrt{2}-1}=a^{\sqrt{2}}\left(a^{-1}\right)^{\sqrt{2}-1}=a^{\sqrt{2}}a^{1-\sqrt{2}}=a$.

Câu 12. Tổng các nghiệm của phương trình $3^{x^4-3x^2}=81$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D

Ta có $3^{x^4-3x^2}=81 \Leftrightarrow 3^{x^4-3x^2}=3^4 \Leftrightarrow x^4-3x^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=-1 \\ x^2=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$.

Vậy tổng các nghiệm của phương trình $3^{x^4-3x^2}=81$ bằng 0.

Câu 13. Tập nghiệm của phương trình $\log_3 x+\log_3(x+2)=2$ là

A. $S=\left\{-1+\sqrt{3}\right\}$. **B.** $S=\left\{-1-\sqrt{10};-1+\sqrt{10}\right\}$.

C. $S=\left\{-1+\sqrt{10}\right\}$. **D.** $S=\left\{0;2\right\}$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $x>0$.

Ta có : $\log_3 x+\log_3(x+2)=2 \Leftrightarrow \log_3\left(x(x+2)\right)=2 \Leftrightarrow x(x+2)=3^2$

$\Leftrightarrow x^2+2x-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1-\sqrt{10} \\ x=-1+\sqrt{10} \end{array}\right.$

Vì $x>0$ nên phương trình có nghiệm duy nhất là $x=-1+\sqrt{10}$.

Câu 14. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2x+1}{x}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

A. $\int f(x)dx=\ln x+2x+C$. **B.** $\int f(x)dx=x-\ln|x|+C$.

C. $\int f(x)dx=\ln|x|+C$. **D.** $\int f(x)dx=\ln|x|+2x+C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int\dfrac{2x+1}{x}dx=\int 2dx+\int\dfrac{1}{x}dx=2x+\ln|x|+C$.

Câu 15. Cho hàm số $f(x)=\sin x\cos x$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

A. $\int f(x)dx=\sin^2 x+C$. **B.** $\int f(x)dx=\dfrac{\sin^2 x}{2}+C$.

C. $\int f(x)dx=\dfrac{\cos^2 x}{2}+C$. **D.** $\int f(x)dx=-\cos^2 x+C$.

Lời giải

Chọn B

Đặt : $t=\sin x \Rightarrow dt=\cos x dx$

$\int\sin x\cos x dx=\int t dt=\dfrac{t^2}{2}+C=\dfrac{\sin^2 x}{2}+C$

Cách khác : Ta có $\int\sin x\cos x dx=\int\sin x d(\sin x)=\dfrac{\sin^2 x}{2}+C$.

Câu 16. Nếu $\int\limits_1^2 f(x)dx=3$ và $\int\limits_6^{12} f\left(\dfrac{x}{3}\right)dx=2$ thì $\int\limits_1^4 f(x)dx$ bằng

A. 5. **B.** $\frac{7}{3}$. **C.** $\frac{11}{3}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Đặt : $t=\frac{x}{3}\Rightarrow dt=\frac{1}{3}dx\Rightarrow dx=3dt$ Đổi cận : x = 6 thì t = 2; x = 12 thì t = 4

$$2=\int_6^{12} f\left(\frac{x}{3}\right)dx=\int_2^4 f(t)3dt \Leftrightarrow \int_2^4 f(t)dt=\frac{2}{3}\Leftrightarrow \int_2^4 f(x)dx=\frac{2}{3}$$

Vậy : $\int_1^4 f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^4 f(x)dx=3+\frac{2}{3}=\frac{11}{3}$

Cách khác : Ta có $\int_6^{12} f\left(\frac{x}{3}\right)dx=3\int_6^{12} f\left(\frac{x}{3}\right)d\left(\frac{x}{3}\right)=3\int_2^4 f(t)dt=3\int_2^4 f(x)dx$. Suy ra: $\int_2^4 f(x)dx=\frac{2}{3}$.

Vậy $\int_1^4 f(x)dx=\int_1^2 f(x)\,dx+\int_2^4 f(x)\,dx=3+\frac{2}{3}=\frac{11}{3}$.

Câu 17. Tích phân $\int_1^e \ln xdx$ bằng

A. e. **B.** $e+1$. **C.** $e-1$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Đặt : $u=\ln x\Rightarrow du=\frac{1}{x}dx$

$dv=dx\Rightarrow v=x$

$$\int_1^e \ln xdx=uv\Big|_1^e-\int_1^e vdu=x\ln x\Big|_1^e-\int_1^e 1dx=x\ln x\Big|_1^e-x\Big|_1^e=e\ln e-\ln 1-(e-1)=1$$

Câu 18. Tổng phần thực và phần ảo của số phức liên hợp của $z=2-3i$ là

A. -1. **B.** 5. **C.** -5. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Số phức liên hợp là $\bar{z}=2+3i$. Do đó tổng cần tìm bằng 5.

Câu 19. Cho hai số phức $z_1=2-i$ và $z_2=7-3i$. Tìm số phức $z=z_1-z_2$.

A. $z=-5+2i$. **B.** $z=9$. **C.** $z=-4i$. **D.** $z=9-4i$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $z=z_1-z_2=(2-i)-(7-3i)=2-i-7+3i=-5+2i$.

Câu 20. Trên mặt phẳng tọa độ, cho số phức $(1+i)z=3-i$, điểm biểu diễn số phức z là

A. $(3;2)$. **B.** $(1;-2)$. **C.** $(2;-1)$. **D.** $(-1;2)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $(1+i)z=3-i\Leftrightarrow z=\frac{3-i}{1+i}\Leftrightarrow z=\frac{(3-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}\Leftrightarrow z=1-2i$.

Vậy điểm biểu diễn số phức z là $M(1;-2)$.

Câu 21. Cho khối chóp có diện tích đáy $B=10\left(\mathrm{m}^2\right)$ và chiều cao $h=6(\mathrm{m})$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $60\left(\mathrm{m}^3\right)$. **B.** $20\left(\mathrm{m}^3\right)$. **C.** $180\left(\mathrm{m}^3\right)$. **D.** $30\left(\mathrm{m}^3\right)$.

Lời giải

Chọn B

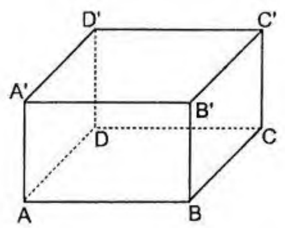
Ta có: $V=\frac{1}{3}B.h=\frac{1}{3}.10.6=20\ \left(m^3\right)$.

Câu 22. Thể tích khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ với $AB=2, AD=3, AA'=4$ bằng

A. 14. **B.** 24. **C.** 20. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B



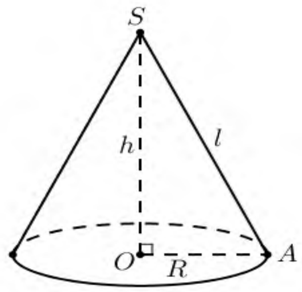
$V_{ABCD.A'B'C'D'}=AA'.S_{ABCD}=4.2.3=24$.

Câu 23. Gọi $l,\ h,\ R$ lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính đáy của hình nón. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\frac{1}{l^2}=\frac{1}{R^2}+\frac{1}{h^2}$. **B.** $l^2=h^2+R^2$. **C.** $R^2=h^2+l^2$. **D.** $l=h$.

Lời giải

Chọn B



Gọi O là tâm đường tròn đáy hình nón, S là đỉnh và SA là đường sinh.

Ta có: $SO\perp OA \Rightarrow SA^2=SO^2+OA^2$ hay $l^2=h^2+R^2$.

Câu 24. Tính diện tích xung quanh của một hình trụ có chiều cao $20\ \mathrm{m}$, chu vi đáy bằng $5\ \mathrm{m}$.

A. $50\ \mathrm{m}^2$. **B.** $50\pi\ \mathrm{m}^2$. **C.** $100\pi\ \mathrm{m}^2$. **D.** $100\ \mathrm{m}^2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có chu vi đáy $C=2\pi R=5(m)$.

Diện tích xung quanh của hình trụ là $S_{xq}=2\pi Rl=5.20=100\left(\mathrm{m}^2\right)$.

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(-2;4;1)$, $B(1;1;-6)$, $C(0;-2;3)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

A. $G\left(-\frac{1}{2};\frac{5}{2};-\frac{5}{2}\right)$. **B.** $G(-1;3;-2)$. **C.** $G\left(\frac{1}{3};-1;\frac{2}{3}\right)$. **D.** $G\left(-\frac{1}{3};1;-\frac{2}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\begin{cases} x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}=\dfrac{-2+1+0}{3}=-\dfrac{1}{3} \\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}=\dfrac{4+1-2}{3}=1 \\ z_G=\dfrac{z_A+z_B+z_C}{3}=\dfrac{1-6+3}{3}=-\dfrac{2}{3} \end{cases}$ nên $G\left(-\frac{1}{3};1;-\frac{2}{3}\right)$.

Câu 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2y+4z+2=0$. Độ dài đường kính của mặt cầu (S) bằng

A. $2\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Từ phương trình mặt cầu dạng 2, suy ra $I(0;1;-2), R=\sqrt{0+1+4-2}=\sqrt{3}$.

Suy ra đường kính bằng $2\sqrt{3}$.

Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(a;b;1)$ thuộc mặt phẳng $(P): 2x-y+z-3=0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $2a-b=3$. **B.** $2a-b=2$. **C.** $2a-b=-2$. **D.** $2a-b=4$.

Lời giải

Chọn B

Vì $M\in(P)$ nên $2a-b+1-3=0 \Leftrightarrow 2a-b=2$.

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;2)$, $B(3;-2;0)$. Một vectơ chỉ phương của đường thẳng AB là

A. $\vec{u}=(-1;2;1)$. **B.** $\vec{u}=(1;2;-1)$. **C.** $\vec{u}=(2;-4;2)$. **D.** $\vec{u}=(2;4;-2)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(2;-4;-2)=-2(-1;2;1)$.

Câu 29. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau. Xác suất để số được chọn có tổng các chữ số là lẻ bằng

A. $\frac{41}{81}$. **B.** $\frac{40}{81}$. **C.** $\frac{16}{81}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời Giải

Chọn B

Số phần tử không gian mẫu: $n(\Omega)=9\times9\times8=648$.

Gọi A là biến cố: "tổng các chữ số là số lẻ ".

Gọi số cần tìm là: $\overline{abc}$ $(a,b,c\in\mathbb{N})$.

TH1: ba chữ số a,b,c đều lẻ có $5\times4\times3=60$ số.

TH2: hai chữ số chẵn một chữ số lẻ có:

- a chẵn, b chẵn, c lẻ có $4\times4\times5=80$ số.
- a chẵn, b lẻ, c chẵn có $4\times5\times4=80$ số.

- a lẻ, b chẵn, c chẵn có $5\times5\times4=100$ số.

$\Rightarrow n(A)=60+80+80+100=320$.

$\Rightarrow$ xác suất biến cố A: $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{320}{648}=\dfrac{40}{81}$.

Câu 30. Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên tập xác định của nó?

A. $y=x^2+1$. **B.** $y=x^4+3x^2+4$. **C.** $y=x^3+x-5$. **D.** $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=3x^2+1>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Câu 31. Xét hàm số $y=x+1-\dfrac{3}{x+2}$ trên đoạn $\left[-1;1\right]$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số có cực trị trên khoảng $\left(-1;1\right)$.

B. Hàm số không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[-1;1\right]$.

C. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=-1$ và đạt giá trị lớn nhất tại $x=1$.

D. Hàm số nghịch biến trên đoạn $\left[-1;1\right]$.

Lời giải

Chọn C

$y'=1+\dfrac{3}{\left(x+2\right)^2}>0\ \forall x\in\left[-1;1\right]$ suy ra hàm số luôn đồng biến trên $\left[-1;1\right]$.

Do đó hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=-1$ và đạt giá trị lớn nhất tại $x=1$.

Câu 32. Bất phương trình $2^{x^2-3x+4}\le\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x-10}$ có bao nhiêu nghiệm nguyên dương?

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Bất phương trình tương đương với $2^{x^2-3x+4}\le2^{10-2x}\Leftrightarrow x^2-3x+4\le10-2x\Leftrightarrow x^2-x-6\le0$ $\Leftrightarrow -2\le x\le3$. Do $x>0$ nên $0<x\le3$.

Mà $x\in\mathbb{Z}^+$ nên $x\in\left\{1;2;3\right\}$ .Vậy có 3 giá trị nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 33. Cho $\int\limits_{-1}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x=2$ và $\int\limits_{-1}^{2}g\left(x\right)\mathrm{d}x=-1$. Tính $I=\int\limits_{-1}^{2}\left[x+2f\left(x\right)+3g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=\dfrac{11}{2}$. **B.** $I=\dfrac{7}{2}$. **C.** $I=\dfrac{17}{2}$. **D.** $I=\dfrac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $I=\left.\dfrac{x^2}{2}\right|_{-1}^{2}+2\int\limits_{-1}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x+3\int\limits_{-1}^{2}g\left(x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{3}{2}+4-3=\dfrac{5}{2}$.

Câu 34. Cho hai số phức $z_1=3-i$ và $z_2=4-i$. Tính môđun của số phức $z_1^2+\overline{z}_2$.

A. 12. **B.** 10. **C.** 13. **D.** 15.

Lời giải

Chọn C

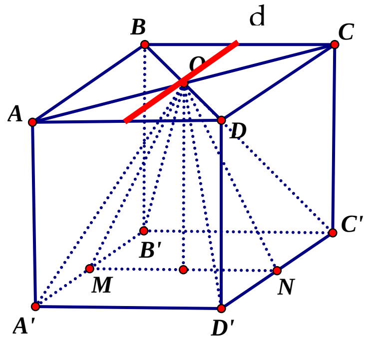
Ta có: $z_1^2+\overline{z}_2=(3-i)^2+(4+i)=12-5i$ nên $\left|z_1^2+\overline{z}_2\right|=\sqrt{12^2+5^2}=13$.

Câu 35. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Côsin của góc giữa hai mặt phẳng $(OA'B')$ và $(OC'D')$ bằng

A. $\frac{2}{5}$. **B.** $\frac{4}{9}$. **C.** $\frac{8}{25}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'B'$ và $C'D'$.

Ta có $((OA'B'),(OC'D'))=(OM,ON)$. Vì giao tuyến của (OA'B') và (OC'D') là d; mà OM và ON vuông d; OM nằm trong (OA'B'), ON nằm trong (OC'D')

Có $MN=a, OM=ON=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=a\frac{\sqrt{5}}{2}$.

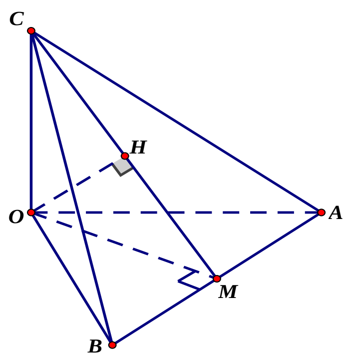
Suy ra $\cos MON=\frac{OM^2+ON^2-MN^2}{2OM.ON}=\frac{3}{5}$.

Câu 36. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA=OB=2a, OC=a\sqrt{2}$. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) bằng

A. $a\sqrt{2}$. **B.** a. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{3a}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm $AB \Rightarrow OM \perp AB$ Vì tam giác OAB cân tại O

Kẻ $OH \perp CM$. Do AB vuông góc mp(OCM), nên OH vuông góc AB. Vậy OH vuông góc mp(ABC). Ta có $OM=a\sqrt{2}$, Vì OA=OB=2a và tam giác OAB vuông tại O

Khi đó $d(O,(ABC))=OH$.

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OM^2}+\frac{1}{OC^2}=\frac{1}{\left(a\sqrt{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(a\sqrt{2}\right)^2}=\frac{1}{a^2}$$

Vậy OH = a

Câu 37. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(2;2;0)$, $B(1;0;2)$, $C(0;4;4)$. Viết phương trình mặt cầu có tâm là A và đi qua trọng tâm G của tam giác ABC.

A. $(x-2)^2+(y-2)^2+z^2=4$.

B. $(x+2)^2+(y+2)^2+z^2=5$.

C. $(x-2)^2+(y-2)^2+z^2=5$.

D. $(x-2)^2+(y-2)^2+z^2=\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC khi đó ta có $G(1;2;2)\Rightarrow\overrightarrow{AG}=(-1;0;2)\Rightarrow R=\left|\overrightarrow{AG}\right|=\sqrt{5}$.

Phương trình mặt cầu tâm A và đi qua trọng tâm G của tam giác ABC là: $(x-2)^2+(y-2)^2+z^2=5$.

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-2;0)$, $B(2;-1;3)$, $C(0;-1;1)$. Đường trung tuyến AM của tam giác ABC có phương trình là

A. $\begin{cases}x=1\\y=-2+t\\z=2t\end{cases}$.

B. $\begin{cases}x=1-2t\\y=-2\\z=-2t\end{cases}$.

C. $\begin{cases}x=1+t\\y=-2\\z=-2t\end{cases}$.

D. $\begin{cases}x=1+2t\\y=-2+t\\z=2t\end{cases}$.

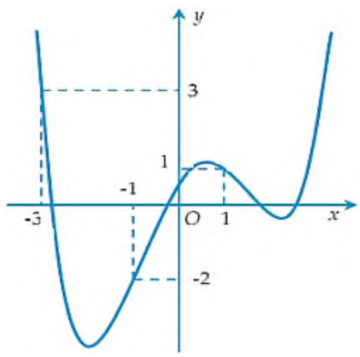
Lời giải

Chọn A

Trung điểm BC là $M(1;-1;2)$, suy ra $\overrightarrow{AM}=(0;1;2)$.

Do đó phương trình đường thẳng AM là $\begin{cases}x=1\\y=-2+t\\z=2t\end{cases}$.

Câu 39. Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Xét hàm số $g(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{2}x+2021$. Trong các mệnh đề dưới đây:

(I) $g(0)<g(1)$.

(II) $\min\limits_{x\in[-3;1]}g(x)=g(-1)$.

(III) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-3;-1)$.

(IV) $\max\limits_{x\in[-3;1]}g(x)=\max\{g(-3);g(1)\}$.

Số mệnh đề **đúng** là

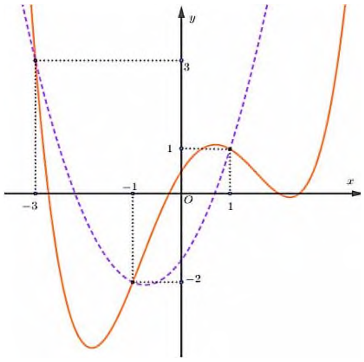
A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x) = f'(x) - \left(x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}\right)$.

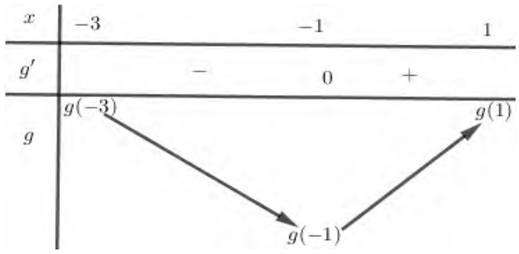
Trên mặt phẳng toạ độ đã có đồ thị hàm số $f'(x)$ ta vẽ thêm đồ thị hàm số $y = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$.



Dựa vào đồ thị hàm số ta có

Khi $x \in (-3;-1)$ thì $f'(x) < x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$, khi $x \in (-1;1)$ thì $f'(x) > x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$.

Do đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y = g(x)$ trên đoạn $[-3;1]$ như sau



Dựa vào bảng biến thiên ta có:

Vì trên $[0;1]$ hàm số $g(x)$ đồng biến nên $g(0) < g(1)$, do đó (I) đúng.

Từ BBT ta có $\min\limits_{[-3;1]} g(x) = g(-1)$, do đó (II) đúng.

Từ BBT ta thấy (III) đúng.

$\max\limits_{[-3;1]} g(x) = \max\{g(-3); g(1)\}$. Nên (IV) đúng

Câu 40. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $1 \le y \le 2020$ và $2^{x-1} = \log_4(x+2y) + y$?

A. 11. **B.** 10. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = \log_4(x+2y) \Leftrightarrow x + 2y = 4^t \Leftrightarrow y = \frac{4^t - x}{2}$.

Khi đó $2^{x-1} = t + \frac{4^t - x}{2} \Leftrightarrow 2^x + x = 2^{2t} + 2t$

Xét hàm số $f(u) = 2^u + u \Rightarrow f'(u) = 2^u \ln 2 + 2 > 0\ \forall u \in \mathbb{R}$.

Do đó $f(x) = f(2t) \Leftrightarrow x = 2t \Rightarrow y = 2^{x-1} - \frac{1}{2}x \in [1;2020]$.

Suy ra $x \in \{2;3;...;11\}$.

Nhưng vì $y \in \mathbb{Z}$ nên $x \vdots 2$. Do đó $x \in \{2;4;6;8;10\}$.

Vậy có 5 cặp số nguyên thỏa mãn.

Câu 41. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2 + 3; x \geq 1 \\ 5 - x; x < 1 \end{cases}$. Tính $I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos x dx + 3\int_0^1 f(3-2x)dx$.

A. $I = \frac{71}{6}$. **B.** $I = 31$. **C.** $I = 32$. **D.** $I = \frac{32}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Xét tích phân $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos x dx$.Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$

Đổi cận

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	0	1

Ta có $I_1 = \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (5-x)dx = \left(5x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{9}{2}$

Xét tích phân $I_2 = \int_0^1 f(3-2x)dx$.Đặt $t = 3-2x \Rightarrow dt = -2dx \Rightarrow dx = \frac{-dt}{2}$

Đổi cận

x	0	1
t	3	1

Ta có

$$I_2 = \int_0^1 f(3-2x)dx = \frac{1}{2}\int_1^3 f(t)dt = \frac{1}{2}\int_1^3 f(x)dx = \frac{1}{2}\int_1^3 (x^2+3)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} + 3x\right)\Big|_1^3 = \frac{1}{2}\left(18 - \frac{10}{3}\right) = \frac{22}{3}$$

Vậy $I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos x dx + 3\int_0^1 f(3-2x)dx = 9 + 22 = 31$.

Câu 42. Có bao nhiêu số phức z đôi một khác nhau thỏa mãn $|z+i| = 2$ và $(z-2)^4$ là một số thực?

A. 4. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Giả sử số phức $z = a + bi$, $(a, b \in \mathbb{R})$.

Ta có $|z+i| = 2 \Leftrightarrow |a + (b+1)i| = 2 \Leftrightarrow a^2 + (b+1)^2 = 4$ (1)

$(z-2)^4 = [(a-2) + bi]^4 = \left[(a-2)^2 - b^2 + 2b(a-2)i\right]^2$

$= (a-2)^4 + b^4 - 4b^2(a-2)^2 - 2b^2(a-2)^2 + 4b(a-2)^3 i - 4b^3(a-2)i$

$=(a-2)^4+b^4-4b^2(a-2)^2-2b^2(a-2)^2+4b(a-2)\left[(a-2)^2-b^2\right]i$

Vì $(z-2)^4$ là một số thực nên $4b(a-2)\left[(a-2)^2-b^2\right]=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}b=0\\a=2\\a-2=b\\a-2=-b\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}b=0\\a=2\\a=b+2\\a=2-b\end{array}\right.$

+) $b=0$ thay vào (1) ta có $a^2+1=4\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=\sqrt{3}\\a=-\sqrt{3}\end{array}\right.$. Có 2 số phức $\left[\begin{array}{l}z=\sqrt{3}\\z=-\sqrt{3}\end{array}\right.$

+) $a=2$ thay vào (1) ta có $2^2+(b+1)^2=4\Rightarrow b=-1$. Có 1 số phức $z=2-i$

+) $a=b+2$ thay vào (1) ta có $(b+2)^2+(b+1)^2=4\Rightarrow 2b^2+6b+1=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}b=\dfrac{-3-\sqrt{7}}{2}\\b=\dfrac{-3+\sqrt{7}}{2}\end{array}\right.$.

Có 2 số phức thỏa mãn

+) $a=-b+2$ thay vào (1) ta có $(-b+2)^2+(b+1)^2=4\Rightarrow 2b^2-2b+1=0$ (Vô nghiệm)

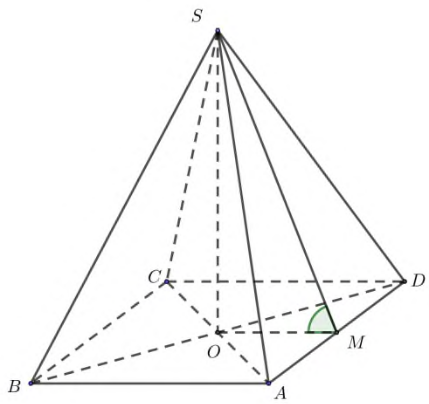
Vậy có 5 số phức thỏa mãn.

Câu 43. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $SA=a\sqrt{21}$, côsin góc hợp bởi hai mặt phẳng SAD và $ABCD$ bằng $\dfrac{\sqrt{5}}{10}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{19}}{3}a^3$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{19}}{3}a^3$. **C.** $\dfrac{4\sqrt{19}}{3}a^3$. **D.** $4\sqrt{19}a^3$.

Lời giải

Chọn C



Gọi cạnh hình vuông đáy là x ,góc hợp bởi hai mặt phẳng SAD và $ABCD$ là góc nhọn SMO

$\Rightarrow\cos SMO=\dfrac{\sqrt{5}}{10}\Leftrightarrow\dfrac{OM}{SM}=\dfrac{\sqrt{5}}{10}\Leftrightarrow\dfrac{x}{2\sqrt{21a^2-\dfrac{x^2}{4}}}=\dfrac{\sqrt{5}}{10}\Leftrightarrow\dfrac{21}{4}x^2=21a^2\Leftrightarrow x=2a$.

Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

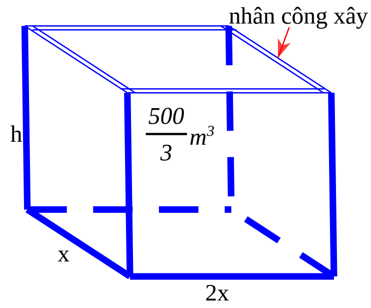
$V=\dfrac{1}{3}SO.S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}\sqrt{SC^2-OC^2}.\ 4a^{\ 2}=\dfrac{\sqrt{21a^2-2a^2}}{3}.4a^2=\dfrac{4\sqrt{19}}{3}a^3$.

Câu 44. Người ta muốn xây một cái bể chứa nước dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích $\frac{500}{3}m^3$ Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, giá thuê nhân công để xây bể là 500000 đồng/ m^2 . Nếu biết xác định kích thước của bể hợp lí thì chi phí thuê nhân công sẽ thấp nhất, chi phí thấp nhất đó là.

A. 70 triệu đồng. **B.** 85 triệu đồng. **C.** 80 triệu đồng. **D.** 75 triệu đồng.

Lời giải

Chọn D



Gọi các yếu tố như hình vẽ, diện tích phần phải xây của bể là phần xung quanh và đáy.

$$\begin{cases} V = 2x^2.h = \frac{500}{3} \\ S = 2x^2 + 6xh \end{cases} \Rightarrow S = 2x^2 + \frac{500}{x} = 2x^2 + \frac{250}{x} + \frac{250}{x} \overset{co-si}{\geq} 150.$$

Số chi phí thấp nhất là $150 \times 500000 = 75$ triệu.

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $M(1;2;2)$, song song với mặt phẳng $(P): x - y + z + 3 = 0$ đồng thời cắt đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}$ có phương trình là

A. $\begin{cases} x = 1-t \\ y = 2-t \\ z = 2 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = 1-t \\ y = 2-t \\ z = 3-t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = 3 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 1-t \\ y = 2+t \\ z = 3 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn A

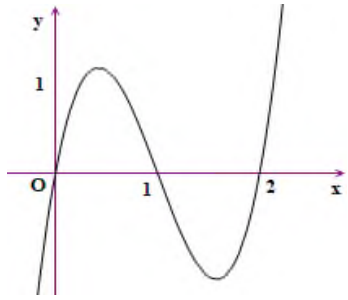
Ptts của d : $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+t \\ z = 3+t \end{cases}$

Gọi $I \in d \Leftrightarrow I(1+t;2+t;3+t)$. Vậy đường thẳng MI cắt d tại I

$\overrightarrow{MI} = (t;t;1+t)$ mà $MI // (P)$ nên $\overrightarrow{MI}.\vec{n}_{(P)} = 0 \Leftrightarrow t - t + (1+t) = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow \overrightarrow{MI} = (-1;-1;0)$

Đường thẳng cần tìm Δ đi qua $M(1;2;2)$ và I nên có véctơ chỉ phương là $\overrightarrow{MI} = (-1;-1;0)$ có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 1-t \\ y = 2-t \\ z = 2 \end{cases}$.

Câu 46. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $y=\left|f\left(f\left(x\right)\right)-x\right|$ là

A. 8. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 11.

Lời giải

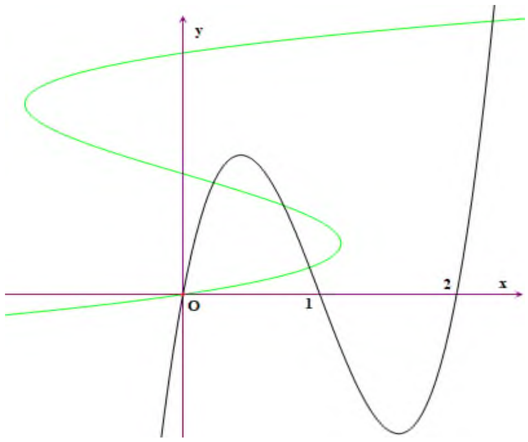
Chọn B

Xét hàm số $h(x)=f\left(f\left(x\right)\right)-x$.

Ta xét phương trình tương giao $f\left(f\left(x\right)\right)=x$.

Đặt $y=f\left(x\right)$ ta có hệ $\begin{cases} f\left(y\right)=x \\ f\left(x\right)=y \end{cases}$.

Từ đồ thị hàm số $y=f\left(x\right),\left(C\right)$ ta suy ra đồ thị hàm số $x=f\left(y\right)$ bằng cách lấy đối xứng $\left(C\right)$ qua đường thẳng $y=x$ như hình vẽ.



Vậy $y=h\left(x\right)$ cắt trục Ox tại 5 điểm phân biệt (bội đơn), suy ra số điểm cực trị của đồ thị hàm số

$y=\left|h\left(x\right)\right|$ là $5+4=9$.

Câu 47. Gọi T là tập hợp tất cả các số phức z thõa mãn $\left|z_1\right|=2$ và $\left|z_2\right|=3,\left|2z_1-z_2\right|=\sqrt{17}$. Gọi M,m lần lượt là các giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $T=\left|3z_1+2z_2-10-12i\right|$. Khi đó $M.n$ bằng

A. 148. **B.** 149. **C.** 150. **D.** 151.

Lời giải

Chọn B

Ta có

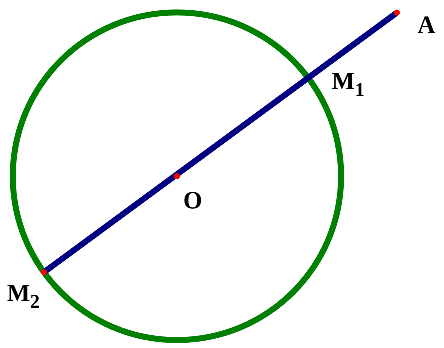
$\left|2z_1-z_2\right|=\sqrt{17}\Leftrightarrow 4\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2-2\left(z_1.\overline{z_2}+\overline{z_1}.z_2\right)=17$

$\Rightarrow\left(z_1.\overline{z_2}+\overline{z_1}.z_2\right)=4$.

Đặt $\text{w}=3z_1+2z_2$ và $M\left(x;y\right)$ là điểm biểu diễn số phức w ,suy ra

$\left|\text{w}\right|^2=\left|3z_1+2z_2\right|^2=9\left|z_1\right|^2+4\left|z_2\right|^2+6\left(z_1.\overline{z_2}+\overline{z_1}.z_2\right)=96$

$|w|=\sqrt{96}=4\sqrt{6}$. Vậy M thuộc đường tròn tâm $O, R=4\sqrt{6}$. Gọi $A=(10;12)$ ta có $T=|3z_1+2z_2-10-12i|=MA$.



Khi đó $\begin{cases} MA_{Max}=AM_2=OA+R \\ MA_{\min}=AM_1=OA-R \end{cases} \Rightarrow M.m=OA^2-R^2=148.$

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(4;0;0)$, $B(0;5;0)$, $C(0;0;101)$. Điểm M thay đổi trên mặt phẳng (ABC) và N là điểm trên tia OM sao cho $OM.ON=2020$. Biết rằng khi M thay đổi, điểm N luôn thuộc một mặt cầu (S) cố định. Đường thẳng đi qua $D(0;202;10)$ cắt (S) theo một dây cung EF ,khi đó EF có độ dài ngắn nhất là.

A. $4\sqrt{10226}$. **B.** $2\sqrt{10226}$. **C.** $3\sqrt{10226}$. **D.** $5\sqrt{10226}$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình mặt phẳng $(ABC): \frac{x}{4}+\frac{y}{5}+\frac{z}{101}=1 \Leftrightarrow 505x+404y+20z-2020=0$

Gọi $N(x;y;z)$

Theo giả thiết ta có N là điểm trên tia OM sao cho $OM.ON=2020$ suy ra $\overrightarrow{OM}=\frac{2020}{ON^2}.\overrightarrow{ON}$

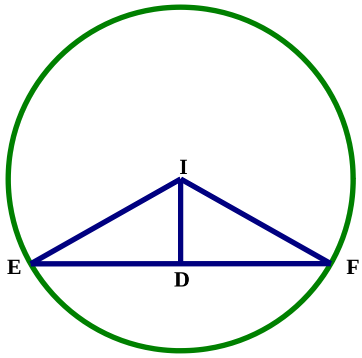
Do đó $M\left(\frac{2020x}{x^2+y^2+z^2};\frac{2020y}{x^2+y^2+z^2};\frac{2020z}{x^2+y^2+z^2}\right)$.

Mặt khác $M\in(ABC)$ nên $505\frac{2020x}{x^2+y^2+z^2}+404\frac{2020y}{x^2+y^2+z^2}+20\frac{2020z}{x^2+y^2+z^2}-2020=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-505x-404y-20z=0$.

Do đó điểm N luôn thuộc một mặt cầu cố định $(S): x^2+y^2+z^2-505x-404y-20z=0$.

Dễ thấy D nằm trong mặt cầu, do vậy EF ngắn nhất khi và chỉ khi $ID\perp EF$, trong đó $I\left(\frac{505}{2};202;10\right)$.



Khi đó $FE_{\min} = 2DF = 2\sqrt{R^2 - ID^2} = 2\sqrt{\left(\frac{505}{2}\right)^2 + 202^2 + 10^2 - \left(\frac{505}{2}\right)^2} = 4\sqrt{10226}$

Câu 49. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-2000;2000)$ để $4a^{\sqrt{\log_a b}} - b^{\sqrt{\log_b a}} > m\sqrt{\log_a b} + 3$ với mọi $a,b \in (1;+\infty)$

A. 2199. **B.** 2000. **C.** 2001. **D.** 1999.

Lời giải

Chọn B

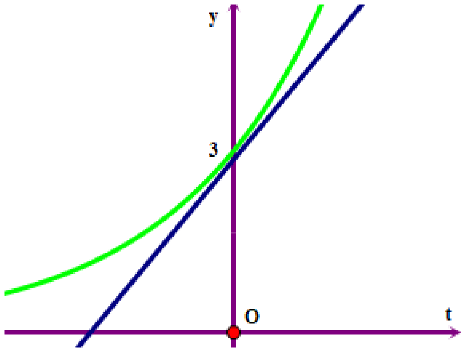
Đặt $\sqrt{\log_a b} = t > 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{\log_b a} = \dfrac{1}{t} \\ b = a^{t^2} \end{cases}$.

Bất phương trình đã cho trở thành

$4a^t - \left(a^{t^2}\right)^{\frac{1}{t}} > mt + 3$ với $\forall t > 0$

$\Leftrightarrow 4a^t - a^t > mt + 3 \Leftrightarrow 3a^t > mt + 3$ với $\forall t > 0$.

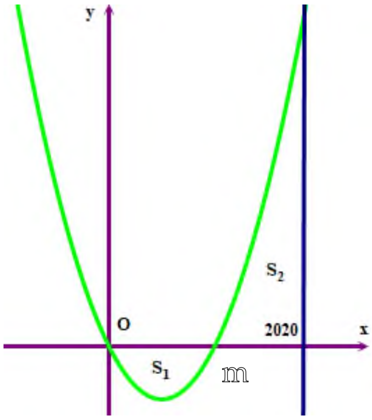
Do vậy đồ thị hàm số $y = 3a^t$ luôn nằm trên đường thẳng $y = mt + 3$ với $\forall t > 0$.



Dựa vào đồ thị hàm số suy ra $m \le 0$

Suy ra $m \in \{-1999;0\}$ vậy có 2000 giá trị thỏa mãn

Câu 50. Cho hàm số $y = x^2 - mx$ $(0 < m < 2020)$ có đồ thị (C). Gọi $S_1 + S_2$ là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi (C), trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = 2020$. Giá trị của m sao cho $S_2 = S_1$ là



A. $m=\dfrac{4040}{3}$ **B.** $m=\dfrac{4041}{3}$ **C.** $m=\dfrac{2021}{3}$ **D.** $m=\dfrac{2020}{3}$

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$S_2=\int_m^{2020}\left(x^2-mx\right)dx=\left.\left(\frac{x^3}{3}-\frac{mx^2}{2}\right)\right|_m^{2020}=\left(\frac{2020^3}{3}-\frac{m2020^2}{2}\right)+\frac{m^3}{6}.$$

$$S_1=-\int_0^m\left(x^2-mx\right)dx=-\left.\left(\frac{x^3}{3}-\frac{mx^2}{2}\right)\right|_0^m=\frac{m^3}{6}.$$

$$S_2=S_1\Leftrightarrow\left(\frac{2020^3}{3}-\frac{m2020^2}{2}\right)+\frac{m^3}{6}=\frac{m^3}{6}.$$

$$\Leftrightarrow\frac{2020^3}{3}-\frac{m2020^2}{2}=0\Leftrightarrow m=\frac{4040}{3}.$$