SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TPHCM
TRƯỜNG THPT HÙNG VƯƠNG

BỘ MÔN: TOÁN - KHỐI LỚP: 11
TUẦN: 7,8/HK1 (từ 18/10/2021 đến 30/10/2021)

PHIẾU HƯỚNG DẪN HỌC SINH TỰ HỌC

I. Nhiệm vụ tự học, nguồn tài liệu cần tham khảo:

Nội dung 1: Quy tắc đếm. *(Đọc SGK bài 1 trang 43-45 và đề cương)*

Nội dung 2: Hoán vị- Chỉnh hợp- Tổ hợp *(Đọc SGK bài 1 trang 46-53 và đề cương)*

Tham khảo thêm clip bài giảng…: *đường link (nếu có)*

II. Kiến thức cần ghi nhớ:

1. Quy tắc cộng

Một công việc được hoàn thành bởi một trong hai hành động. Nếu hành động này có m cách thực hiên, hành động kia có n cách thực hiên không trùng với bất kì cách nào của hành động thứ nhất thì công việc đó có m + n cách thực hiện.

Chú ý: số phần tử của tập hợp hữu hạn X được kí hiệu là |X| hoặc n(X)

Quy tắc cộng được phát biểu ở trên thực chất là quy tắc đếm số phần tử của hợp hai tập hợp hữu hạn không giao nhau: Nếu A và B là các tập hợp hữu hạn không giao nhau thì

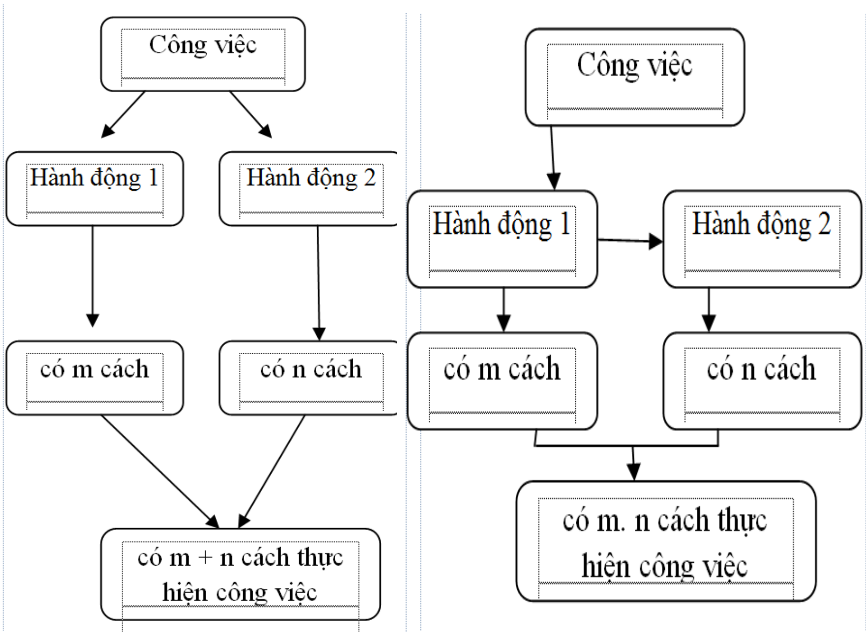
$n\left(A\cup B\right)=n\left(A\right)+n\left(B\right)$

Mở rộng: Một công việc được hoàn thành bởi một trong k hành động $A_1, A_2, A_3, ..., A_k$.Nếu hành động A_1 có $m_1$cách thực hiện, hành động A_2 có m_2 cách thực hiện,…, hành động A_k có m_k cách thực hiện và các cách thực hiên của các hành động trên không trùng nhau thì công việc đó có $m_1+m_2+m_3+...+m_k$ cách thực hiện.

2. Quy tắc nhân

Một công việc được hoàn thành bởi hai hành động liên tiếp.Nếu có m cách thực hiện hành động thứ nhất và ứng với mỗi cách đó có n cách thực hiện hành động thứ hai thì công việc đó có m.n cách thực hiện.

Mở rộng: Một công việc được hoàn thành bởi k hành động $A_1, A_2, A_3, ..., A_k$ liên tiếp. Nếu hành động A_1 có $m_1$cách thực hiện, ứng với mỗi cách thực hiện hành động A_1 có m_2 cách thực hiện hành động A_2,…, có m_k cách thực hiện hành động A_k thì công việc đó có $m_1.m_2.m_3.....m_k$ cách hoàn thành.



1. Hoán vị

Cho tập hợp A có n phần tử $(n \geq 1)$. Mỗi kết quả của sự sắp xếp thứ tự n phần tử của tập hợp A được gọi là một hoán vị của n phần tử đó. Số các hoán vị của tập hợp có n phần tử được kí hiệu là P_n

Định lí 1: $P_n = n(n-1)...2.1 = n!$ với P_n là số các hoán vị

chứng minh

Việc sắp xếp thứ tự n phần tử của tập hợp A là một công việc gồm n công đoạn.

Công đoạn 1: Chọn phần tử xếp vào vị trí thứ nhất: n cách

Công đoạn 2: chọn phần tử xếp vào vị trí thứ hai: (n-1) cách

Công đoạn thứ i: chọn phần tử xếp vào vị trí thứ i có $(n-i+1)$ cách.

.

Công đoạn thứ n: chọn phần tử xếp vào vị trí thứ n có 1 cách.

Theo quy tắc nhân thì có $P_n = n!$ cách sắp xếp thứ tự n phần tử của tập A, tức là có $n!$ hoán vị.

STUDY TIP

Hai hoán vị của n phần tử chỉ khác nhau ở thứ tự sắp xếp. Chẳng hạn, hai hoán vị abc và acb của ba phần tử a, b, c là khác nhau.

2. Chỉnh hợp

Cho tập A gồm n phần tử $(n \geq 1)$.

Kết quả của việc lấy k phần tử khác nhau từ n phần tử của tập hợp A và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó được gọi là một chinht hợp chập k của n phần tử đã cho.

STUDY TIP:

Từ định nghĩa ta thấy một hoán vị của tập hợp A có n phần tử là một chỉnh hợp chập n của A.

$$P = A_n^n$$

Định lý 2: $A_n^k = n(n-1)...(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ với A_n^k là số các chỉnh hợp chập k của n phần tử $(1 \leq k \leq n)$.

Chứng minh

Việc thiết lập một chỉnh hợp chập k của tập A có n phần tử là một công việc gồm k công đoạn.

Công đoạn 1: Chọn phần tử xếp vào vị trí thứ nhất có n cách thực hiện.
Công đoạn 2: Chọn phần tử xếp vào vị trí thứ hai có $n-1$ cách thực hiện.

.

Sau khi thực hiện xong $i-1$ công đoạn (chọn $i-1$ phần tử của A vào các vị trí thứ 1, 2,., $i-1$), công đoạn thứ i tiếp theo là chọn phần tử xếp vào vị trí thứ i có $n-i+1$ cách thực hiện.
Công đoạn cuối, công đoạn k có $n-k+1$ cách thực hiện.

Thoe quy tắc nhân thì có $n(n-1)...(n-k+1)=\dfrac{n!}{(n-k)!}$ chỉnh hợp chập k của tập A có n phần tử.

3. Tổ hợp

Giả sử tập A có n phần tử $(n\geq 1)$. Mỗi tập con gồm k phần tử của A được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử đã cho.

Số các tổ hợp chập k của tập hợp có n phần tử có kí hiệu là C_n^k.

STUDY TIP
Số k trong định nghĩa cần thỏa mãn điều kiện $1\leq k\leq n$. Tuy vậy, tập hợp không có phần tử nào là tập rỗng nên ta quy ước gọi tổ hợp chập 0 của n phần tử là tập rỗng.

QUY ƯỚC
$0!=1$

Định lý 3

$$C_n^k=\frac{A_n^k}{k!}=\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Chứng minh

Ta có mỗi hoán vị của một tổ hợp chập k của A cho ta một chỉnh hợp chập k của **A.** Vậy $A_n^k=k!C_n^k\Leftrightarrow C_n^k=\dfrac{A_n^k}{k!}$.

Định lý 4 (hai tính chất cơ bản của số C_n^k)

a. Cho số nguyên dương n và số nguyên k với $0\leq k\leq n$. Khi đó $C_n^k=C_n^{n-k}$.

b. Hằng đẳng thức Pascal

Cho số nguyên dương n và số nguyên dương k với $1\leq k\leq n$. Khi đó $C_{n+1}^k=C_n^k+C_n^{k-1}$.

Đọc thêm

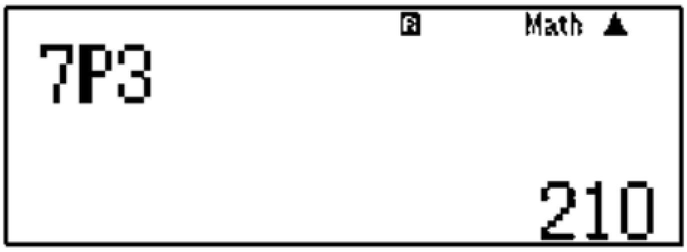
Trên máy tính cầm tay có chức năng tính tổ hợp, chỉnh hợp như sau:

Với tổ hợp ta nhấn tổ hợp phím SHIFT ÷ **(nCr)**

Ví dụ ta muốn tính C_{12}^5 ta ấn 1 2 SHIFT ÷ **(nCr)** 5 =

Với chỉnh hợp ta ấn tổ hợp phím SHIFT × **(nPr)**

Ví dụ ta muốn tính A_7^3 ta ấn tổ hợp phím 7 SHIFT × **(nPr)** 3 =



III. BÀI TẬP:

Phương pháp chung:

Để đếm số cách lựa chọn để thực hiện một công việc A bằng quy tắc cộng, ta thực hiện các bước:

Bước 1: Phân tích xem có bao nhiêu phương án riêng biệt để thực hiện công việc A (có nghĩa công việc A có thể hoàn thành bằng một trong các phương án $A_1; A_2; ...; A_n$).

Bước 2: Đếm số cách chọn $x_1; x_2; ...; x_n$ trong các phương án $A_1; A_2; ...; A_n$.

Bước 3: Dùng quy tắc cộng ta tính được số cách lựa chọn để thực hiện công việc A là $x = x_1 + x_2 + ... + x_n$.

Để đếm số cách lựa chọn để thực hiện công việc A bằng quy tắc nhân, ta thực hiện các bước:

Bước 1: Phân tích xem có bao nhiêu công đoạn liên tiếp cần phải tiến hành để thực hiện công việc A (giả sử A chỉ hoàn thành sau khi tất cả các công đoạn $A_1; A_2; ...; A_n$ hoàn thành).

Bước 2: Đếm số cách chọn $x_1; x_2; ...; x_n$ trong các công đoạn $A_1; A_2; ...; A_n$.

Bước 3: Dùng quy tắc nhân ta tính được số cách lựa chọn để thực hiện công việc A là $x = x_1.x_2.x_3...x_n$.

Ví dụ 1. Một lớp học có 25 học sinh nam và 20 học sinh nữ. Giáo viên chủ nhiệm muốn chọn ra:

a) một học sinh đi dự trại hè của trường.

b) một học sinh nam và một học sinh nữ dự trại hè của trường. Số cách Chonju trong mỗi trường hợp a và b lần lượt là

A. 45 và 500. **B.** 500 và 45. **C.** 25 và 500. **D.** 500 và 25.

Lời giải

Chọn A

a) Bước 1: Với bài toán a thì ta thấy cô giáo có thể có hai phương án để chọn học sinh đi thi:

Bước 2: Đếm số cách chọn.

* ***Phương án 1:*** chọn 1 học sinh đi dự trại hè của trường thì có 25 cách chọn.

* ***Phương án 2:*** chọn học sinh nữ đi dự trại hè của trường thì có 20 cách chọn.

Bước 3: Áp dụng quy tắc cộng.

Vậy có $20 + 25 = 45$ cách chọn.

b) Bước 1: Với bài toán b thì ta thấy công việc là chọn học sinh nam và một học sinh nữ. Do vậy ta có 2 công đoạn.

Bước 2: Đếm số cách chọn trong các công đoạn.

* ***Công đoạn 1:*** Chọn 1 học sinh nam trong số 25 học sinh nam thì có 25 cách chọn.

* ***Công đoạn 2:*** Chọn 1 học sinh nữ trong số 20 học sinh nữ thì có 20 cách chọn.

Bước 3: Áp dụng quy tắc nhân.

Vậy ta có $25.20 = 500$ cách chọn.

STUDY TIP

Bài toán ở ví dụ 1 giúp ta cũng cố và định hình các bước giải quyết bài toán đếm sử dụng quy tắc cộng; quy tắc nhân.

Chú ý:

* ***Quy tắc cộng:*** Áp dụng khi công việc có nhiều phương án giải quyết.

* ***Quy tắc nhân:*** Áp dụng khi công việc có nhiều công đoạn.

Ví dụ 2. Trên giá sách có 10 quyển sách Văn khác nhau, 8 quyển sách Toán khác nhau và 6 quyển sách Tiếng Anh khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách chọn hai quyển sách khác môn nhau?

A. 80. **B.** 60. **C.** 48. **D.** 188.

Lời giải

Chọn D

Theo quy tắc nhân ta có:

$10.8 = 80$ cách chọn một quyển sách Văn và một quyển sách Toán khác nhau.

$10.6=60$ cách chọn một quyển sách Văn và một quyển sách Tiếng Anh khác nhau.

$8.6=48$ cách chọn một quyển sách Toán và một quyển sách Tiếng Anh khác nhau.

Theo quy tắc cộng ta có số cách chọn 2 quyển sách khác môn là $80+60+48=188$ cách.

STUDY TIP

Ta thấy bài toán ở ví dụ 2 là sự kết hợp của cả quy tắc cộng và quy tắc nhân khi bài toán vừa cần chia trường hợp vừa cần lựa chọn theo bước.

Ví dụ 3. Biển đăng kí xe ô tô có 6 chữ số và hai chữ cái trong số 26 chữ cái (không dùng các chữ I và O). Chữ đầu tiên khác 0. Hỏi số ô tô được đăng kí nhiều nhất có thể là bao nhiêu?

A. 5184.10^5. **B.** 576.10^6. **C.** 33384960. **D.** 4968.10^5.

Lời giải

Chọn A

Theo quy tắc nhân ta thực hiện từng bước.

Chữ cái đầu tiên có 24 cách chọn.

Chữ cái tiếp theo cũng có 24 cách chọn.

Chữ số đầu tiên có 9 cách chọn.

Chữ số thứ hai có 10 cách chọn.

Chữ số thứ ba có 10 cách chọn.

Chữ số thứ tư có 10 cách chọn.

Chữ số thứ năm có 10 cách chọn.

Chữ số thứ sau có 10 cách chọn.

Vậy theo quy tắc nhân ta có $24.24.9.10^5=5184.10^5$ là số ô tô nhiều nhất có thể đăng kí.

STUDY TIP

Có thể phân biệt bài toán sử dụng quy tắc cộng hay quy tắc nhân là phân biệt xem công việc cần làm có thể chia trường hợp hay phải làm theo từng bước.

Ví dụ 4. Có bao nhiêu cách xếp 7 học sinh A,B,C,D,E,F,G vào một hàng ghế dài gồm 7 ghế sao cho hai bạn B và F ngồi ở hai ghế đầu?

A. 720 cách. **B.** 5040 cách. **C.** 240 cách. **D.** 120 cách.

Lời giải

Chọn C

Ta thấy ở đây bài toán xuất hiện hai đối tượng.

Đối tượng 1: Hai bạn B và F (hai đối tượng này có tính chất riêng).

Đối tượng 2: Các bạn còn lại có thể thay đổi vị trí cho nhau.

Bước 1: Ta sử dụng tính chất riêng của hai bạn B và F trước. Hai bạn này chỉ ngồi đầu và ngồi cuối, hoán đổi cho nhau nên có $2!$ cách xếp.

Bước 2: Xếp vị trí cho các bạn còn lại, ta có $5!$ cách xếp.

Vậy ta có $2!.5!=240$ cách xếp.

STUDY TIP

Để nhận dạng một bài toán đếm có sử dụng hoán vị của n phần tử, ta dựa trên dấu hiệu

a. Tất cả n phần tử đều có mặt.

b. Mỗi phần tử chỉ xuất hiện 1 lần.

c. Có sự phân biệt thứ tự giữa các phần tử.

d. Số cách xếp n phần tử là số hoán vị của n phần tử đó $P_n=n!$.

Ví dụ 5. Một nhóm 9 người gồm ba đàn ông, bốn phụ nữ và hai đứa trẻ đi xem phim. Hỏi có bao nhiêu cách xếp họ ngồi trên một hàng ghế sao cho mỗi đứa trẻ ngồi giữa hai phụ nữ và không có hai người đàn ông nào ngồi cạnh nhau?

A. 288. **B.** 864. **C.** 24. **D.** 576.

Lời giải

Chọn B

Kí hiệu T là ghế đàn ông ngồi, N là ghế cho phụ nữ ngồi, C là ghế cho trẻ con ngồi. Ta có các phương án sau:

PA1: $TNCNTNCNT$

PA2: $TNTNCNCNT$

PA3: $TNCNCNTNT$

Xét phương án 1: Ba vị trí ghế cho đàn ông có $3!$ cách.

Bốn vị trí ghế cho phụ nữ có thể có $4!$ cách.

Hai vị trí ghế trẻ con ngồi có thể có $2!$ cách.

Theo quy tắc nhân thì ta có $3!.4!.2! = 288$ cách.

Lập luận tương tự cho phương án 2 và phương án 3.

Theo quy tắc cộng thì ta có $288 + 288 + 288 = 864$ cách.

STUDY TIP

Với các bài toán gồm có ít phần tử và vừa cần chia trường hợp vừa thực hiện theo bước thì ta cần chia rõ trường hợp trước, lần lượt thực hiện từng trường hợp (sử dụng quy tắc nhân từng bước) sau đó mới áp dụng quy tắc cộng để cộng số cách trong các trường hợp với nhau.

Ví dụ 6. Một chồng sách gồm 4 quyển sách Toán, 3 quyển sách Vật lý, 5 quyển sách Hóa học. Hỏi có bao nhiêu cách xếp các quyển sách trên thành một hàng ngang sao cho 4 quyển sách Toán đứng cạnh nhau, 3 quyển Vật lý đứng cạnh nhau?

A. 1 cách. **B.** 5040 cách. **C.** 725760 cách. **D.** 144 cách.

Lời giải

Chọn C.

Bước 1: Do đề bài cho 4 quyển sách Toán đứng cạnh nhau nên ta sẽ coi như "buộc" các quyển sách Toán lại với nhau thì số cách xếp cho "buộc" Toán này là $4!$ cách.

Bước 2: Tương tự ta cũng "buộc" 3 quyển sách Lý lại với nhau, thì số cách xếp cho "buộc" Lý này là $3!$ cách.

Bước 3: Lúc này ta sẽ đi xếp vị trí cho 7 phần tử trong đó có:

+ 1 "buộc" Toán.

+ 1 "buộc" Lý.

+ 5 quyển Hóa.

Thì sẽ có $7!$ cách xếp.

Vậy theo quy tắc nhân ta có $7!.4!.3! = 725760$ cách xếp.

STUDY TIP

Với các dạng bài tập yêu cầu xếp hai hoặc nhiều phần tử đứng cạnh nhau thì ta sẽ "buộc" các phần tử này một nhóm và coi như 1 phần tử.

Ví dụ 7. Một câu lạc bộ phụ nữ của phường Khương Mai có 39 hội viên. Phường Khương Mai có tổ chức một hội thảo cần chọn ra 9 người xếp vào 9 vị trí lễ tân khác nhau ở cổng chào, 12 người vào 12 vị trí khác nhau ở ghế khách mời. Hỏi có bao nhiêu cách chọn các hội viên để đi tham gia các vị trí trong hội thao theo quy định?

A. $A_{39}^{9}.A_{39}^{12}$. **B.** $C_{39}^{9}.C_{30}^{12}$. **C.** $C_{39}^{9}.C_{39}^{12}$. **D.** $A_{39}^{9}.A_{30}^{12}$.

Phân tích

Bài toán sử dụng quy tắc nhân khi ta phải thực hiện hai bước:

Bước 1: Chọn 9 người vào vị trí lễ tân.

Bước 2: Chọn 12 người vào vị trí khách mời.

Dấu hiệu nhận biết sử dụng chỉnh hợp ở phần STUDY TIP.

Lời giải

Chọn D.

Bước 1: Chọn người vào vị trí lễ tân.

Do ở đây được sắp theo thứ tự nên ta sẽ sử dụng chỉnh hợp. Số cách chọn ra 9 người vào vị trí lễ tân là A_{39}^{9} cách.

Bước 2: Chọn người vào vị trí khách mời. Số cách chọn là 12 thành viên trong số các thành viên còn lại để xếp vào khách mời là A_{39}^{12} cách.

Vậy theo quy tắc nhân thì số cách chọn các hội viên để đi dự hội thảo theo đúng quy định là $A_{39}^{9}.A_{39}^{12}$ cách.

STUDY TIP

Để nhận dạng một bài toán đếm có sử dụng chỉnh hợp chập k của n phần tử, ta cần có các dấu hiệu:

a. Phải chọn k phần tử từ n phần tử cho trước.

b. Có sự phân biệt thứ tự giữa k phần tử được chọn.

c. Số cách chọn k phần tử có phân biệt thứ tự từ n phần tử là A_n^k cách.

Ví dụ 8. Có 6 học sinh và 2 thầy giáo được xếp thành hàng ngang. Hỏi có bao nhiêu cách xếp sao cho hai thầy giáo không đứng cạnh nhau?

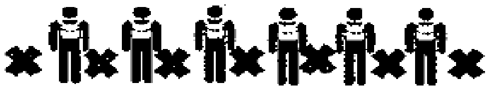
A. 30240 cách. **B.** 720 cách. **C.** 362880 cách. **D.** 1440 cách.

Lời giải

Chọn A.

Cách 1: Trước hết, xếp 6 học sinh thành một hàng có $6!$ cách.

Lúc này giữa hai học sinh bất kì sẽ tạo nên một vách ngăn và 6 học sinh sẽ tạo nên 7 vị trí có thể xếp các thầy vào đó tính cả hai vị trí ở hai đầu hàng (hình minh họa bên dưới). 7 vị trí dấu nhân chính là 7 vách ngăn được tạo ra.



+ Do đề yêu cầu 2 thầy giáo không đứng cạnh nhau nên ta xếp 2 thầy giáo vào 2 trong 7 vị trí vách ngăn được tạo ra có A_7^2 cách.

Theo quy tắc nhân ta có tất cả $6!.A_7^2=30240$ cách xếp.

Cách 2:

- Có $8!$ cách xếp 8 người.
- Buộc hai giáo viên lại với nhau thì có $2!$ cách buộc.

Khi đó có $2.7!$ cách xếp. Mà hai giáo viên không đứng cạnh nhau nên số cách xếp là $8!-2.7!=30140$ cách xếp.

STUDY TIP

Khi bài toán yêu cầu xếp hai hoặc nhiều phần tử không đứng cạnh nhau. Chúng ta có thể tạo ra các "vách ngăn" các phần tử này trước khi xếp chúng.

Ví dụ 9. Từ 5 bông hồng vàng, 3 bông hồng trắng và 4 bông hồng đỏ (các bông hoa xem như đôi một khác nhau), người ta muốn chọn một bó hồng gồm 7 bông, hỏi có bao nhiêu cách chọn bó hoa trong đó có ít nhất 3 bông hồng vàng và 3 bông hồng đỏ?

A. 10 cách. **B.** 20 cách. **C.** 120 cách. **D.** 150 cách.

Phân tích

Ta thấy do chỉ chọn 7 bông hồng mà có ít nhất 3 bông hồng vàng và ít nhất 3 bông hồng đỏ nên chỉ có 3 trường hợp sau:

TH1: Chọn được 3 bông hồng vàng và 4 bông hồng đỏ.

TH2: Chọn được 4 bông hồng vàng và 3 bông hồng đỏ.

TH3: Chọn được 3 bông hồng vàng, 3 bông hồng đỏ và 1 bông hồng trắng.

Lời giải

Chọn D.

TH1: Số cách chọn 3 bông hồng vàng là C_5^3 cách.

Số cách chọn 4 bông hồng đỏ là C_4^4 cách.

Theo quy tắc nhân thì có $C_5^3.C_4^4 = 10$ cách.

TH2: Tương tự TH1 thì ta có $C_5^4.C_4^3 = 20$ cách.

TH3: Tương tự thì có $C_5^3.C_4^3.C_3^1 = 120$ cách.

Vậy theo quy tắc cộng thì có $10 + 20 + 120 = 150$ cách.

STUDY TIP

Để nhận dạng bài toán sử dụng tổ hợp chập k của n phần tử, ta dựa trên dấu hiệu:

a. Phải chọn ra k phần tử từ n phần tử cho trước.

b. Không phân biệt thứ tự giữa k phần tử được chọn.

c. Số cách chọn k phần tử không phân biệt thứ tự từ n phần tử đã cho là C_n^k cách.

Từ các bài toán trên ta rút ra được quy luật phân biệt tổ hợp và chỉnh hợp như sau:

- Chỉnh hợp và tổ hợp liên hệ với nhau bởi công thức: $A_n^k = k!.C_n^k$
- Chỉnh hợp: Có thứ tự.
- Tổ hợp: Không có thứ tự.
- Những bài toán mà kết quả phụ thuộc vào vị trí các phần tử thì sử dụng chỉnh hợp. Ngược lại thì sử dụng tổ hợp.
- Cách lấy k phần tử từ tập n phần tử $\left(k \le n\right)$:

  + Không thứ tự: C_n^k

  + Có thứ tự: A_n^k

Ví dụ 10. Đội thanh niên xung kích của một trường phổ thông có 12 học sinh, gồm 5 học sinh lớp A, 4 học sinh lớp B và 3 học sinh lớp C. Cần chọn 4 học sinh đi làm nhiệm vụ sao cho 4 học sinh này thuộc không quá 2 trong 3 lớp trên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy?

A. 120. **B.** 90. **C.** 270. **D.** 255.

Lời giải

Chọn D.

Số cách chọn 4 học sinh bất kì từ 12 học sinh là $C_{12}^4 = 495$ cách.

Số cách chọn 4 học sinh mà mỗi lớp có ít nhất một em được tính như sau:

$*$ **TH1:** Lớp A có hai học sinh, các lớp B, C mỗi lớp có 1 học sinh:

Chọn 2 học sinh trong 5 học sinh lớp A có C_5^2 cách.

Chọn 1 học sinh trong 4 học sinh lớp B có C_4^1 cách.

Chọn 1 học sinh trong 3 học sinh lớp C có C_3^1 cách.

Suy ra số cách chọn là $C_5^2.C_4^1.C_3^1 = 120$ cách.

$*$ **TH2:** Lớp B có 2 học sinh, các lớp A, C mỗi lớp có 1 học sinh:

Tương tự ta có số cách chọn là $C_5^1.C_4^2.C_3^1 = 90$ cách.

$*$ **TH3:** Lớp C có 2 học sinh, các lớp A, B mỗi lớp có 1 học sinh:

Tương tự ta có số cách chọn là $C_5^1.C_4^1.C_3^2 = 60$ cách.

Vậy số cách chọn 4 học sinh mà mỗi lớp có ít nhất một học sinh là $120 + 90 + 60 = 270$ cách.

Số cách chọn ra 4 học sinh thuộc không quá 2 trong 3 lớp trên là $495 - 270 = 225$ cách.

STUDY TIP

Trong nhiều bài toán, làm trực tiếp sẽ khó trong việc xác định các trường hợp hoặc các bước thì ta nên làm theo hướng gián tiếp như bài toán ở ví dụ 9.

Ta sử dụng cách làm gián tiếp khi bài toán giải bằng cách trực tiếp gặp khó khan do xảy ra quá nhiều trường hợp, chúng ta tìm cách gián tiếp bằng cách xét bài toán đối.

Ví dụ 11. Với các chữ số $0,1,2,3,4,5$ có thể lập được bao nhiêu số gồm 8 chữ số, trong đó chữ số 1 có mặt 3 lần, mỗi chữ số khác có mặt đúng một lần?

A. 6720 số. **B.** 40320 số. **C.** 5880 số. **D.** 840 số.

Lời giải

Chọn C.

Giả sử các số tự nhiên gồm 8 chữ số tương ứng với 8 ô.

Do chữ số 1 có mặt 3 lần nên ta sẽ coi như tìm số các số thỏa mãn đề bài được tạo nên từ 8 số $0,1,1,1,2,3,4,5$.

Số hoán vị của 8 số $0,1,1,1,2,3,4,5$ trong 8 ô trên là $8!$

Mặt khác chữ số 1 lặp lại 3 lần nên số cách xếp là $\frac{8!}{3!}$ kể cả trường hợp số 0 đứng đầu.

Xét trường hợp ô thứ nhất là chữ số 0, thì số cách xếp là $\frac{7!}{3!}$.

STUDY TIP

Bài toán trên là một dấu hiêu của hoán vị lặp. Để biết thêm về hoán vị lặp thì ta sẽ nghiên cứu ở phần đọc thêm.

⊛ **ĐỌC THÊM:** Cho k phần tử khác nhau $a_1,a_2,...,a_k$. Một cách sắp xếp n phân tử trong đó gồm n_1 phần tử a_1,n_2 phần tử $a_2,...,n_k$ phần tử a_k $\left(n_1+n_2+...+n_k=n\right)$ theo một thứ tự nào đó được gọi là hoán vị lặp cấp n và kiểu $\left(n_1,n_2,...,n_k\right)$ của k phần tử. Số các hoán vị lặp dạng như trên là $P_n\left(n_1,n_2,...,n_k\right)=\frac{n!}{n_1!.n_2!...n_k!}$.

Vậy các số tự nhiên thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\frac{8!}{3!}-\frac{7!}{3!}=5880$ số.

Ví dụ 12. Cho 8 bạn học sinh A,B,C,D,E,F,G,H. Hỏi có bao nhiêu cách xếp 8 bạn đó ngồi xung quanh 1 bàn tròn có 8 ghế?

A. 40320 cách. **B.** 5040 cách. **C.** 720 cách. **D.** 40319 cách.

Lời giải

Ta thấy ở đây xếp các vị trí theo hình tròn nên ta phải cố định vị trí một bạn.

Ta chọn cố định vị trị của A, sau đó xếp vị trí cho 7 bạn còn lại có $7!$ cách.

Vậy có $7!=5040$ cách.

ĐỌC THÊM

Hoán vị vòng quanh: Cho tập A gồm n phần tử. Một cách sắp xếp n phần tử của tập A thành một dãy kín được gọi là một hoán vị vòng quanh của n phần tử. Số các hoán vị vòng quanh của n phần tử là $Q_n=\left(n-1\right)!$

Ví dụ 13. Một thầy giáo có 10 cuốn sách khác nhau trong đó có 4 cuốn sách Toán, 3 cuốn sách Lí, 3 cuốn sách Hóa. Thầy muốn lấy ra 5 cuốn và tặng cho 5 em học sinh A,B,C,D,E mỗi em một cuốn. Hỏi thầy giáo có bao nhiêu cách tặng cho các em học sinh sao cho sau khi tặng xong, mỗi một trong ba loại sách trên đều còn ít nhất một cuốn.

A. 204 cách. **B.** 24480 cách. **C.** 720 cách. **D.** 2520 cách.

Lời giải

Ta thấy với bài toán này nếu làm trực tiếp thì sẽ khá khó, nên ta sẽ làm theo cách gián tiếp. Tìm bài toán đối đó là tìm số cách sao cho sau khi tặng sách xong có 1 môn hết sách.

TH1: Môn Toán hết sách:

Số cách chọn 4 cuốn sách Toán là 1 cách.

Số cách chọn 1 cuốn trong 6 cuốn còn lại là 6 cách.

Vậy có 6 cách chọn sách.

Số cách tặng 5 cuốn sách đó cho 5 em học sinh là $A_5^5 = 120$ cách.

Vậy có $6.120 = 720$ cách.

TH2: Môn Lí hết sách:

Số cách chọn 3 cuốn sách Lí là 1 cách.

Số cách chọn 2 cuốn trong 7 cuốn còn lại là C_7^2 cách.

Vậy có 21 cách chọn sách.

Số cách tặng 5 cuốn sách đó cho 5 em học sinh là $A_5^5 = 120$ cách.

Vậy có $21.120 = 2520$ cách.

TH3: Môn Hóa hết sách: Tương tự trường hợp 2 thì có 2520 cách.

Số cách chọn 5 cuốn bất kì trong 10 cuốn và tặng cho 5 em là $C_{10}^5.A_5^5 = 30240$ cách.

Vậy số cách chọn sao cho sau khi tặng xong, mỗi loại sách trên đều còn lại ít nhất một cuốn là $30240 - 720 - 2520 - 2520 = 24480$ cách.

STUDY TIP

Ở đây có nhiều độc giả không xét đến công đoạn sau khi chọn sách còn công đoạn tặng sách nữa. Do các bạn A, B, C, D, E là khác nhau nên mỗi cách tặng sách các môn cho các bạn là khác nhau, nên ta phải xét thêm công đoạn đó.

IV. Nội dung chuẩn bị:

HS cần xem kĩ lý thuyết SGK trước khi tham khảo phần lý thuyết tóm lượt và bài tập.

V. Đáp án bài tập tự luyện:

Nếu có thắc mắc HS liên hệ GVBM để được hỗ trợ.