

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TP HCM  
TRƯỜNG THPT HÙNG VƯƠNG

BỘ MÔN: TOÁN - KHỐI LỚP: 11

TUẦN: 7,8/HK1 (từ 18/10/2021 đến 30/10/2021)

PHIẾU HƯỚNG DẪN HỌC SINH TỰ HỌC

I. Nhiệm vụ tự học, nguồn tài liệu cần tham khảo:

Nội dung 1: Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng. (Đọc SGK bài 1 trang 60 và đề cương )

Nội dung 2: Tính chất- Định lý về đường thẳng và mặt phẳng (Đọc SGK bài 1 trang 61-63 và đề cương )

Tham khảo thêm clip bài giảng...: [đường link \(nếu có\)](#)

II. Kiến thức cần ghi nhớ:

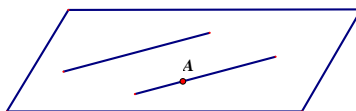
1. Định nghĩa

Trong phần vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian, ta biết rằng hai đường thẳng phân biệt bất kì hoặc chéo nhau hoặc song song hoặc cắt nhau. Nếu hai đường thẳng phân biệt đồng phẳng và không cắt nhau thì ta nói hai đường thẳng đó song song với nhau.

Định nghĩa:

Hai đường thẳng phân biệt  $a, b$  trong không gian được gọi là song song với nhau, kí hiệu  $a // b$  nếu chúng đồng phẳng và không cắt nhau.

2. Tính chất

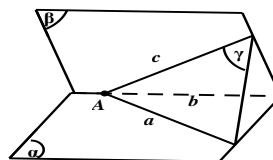
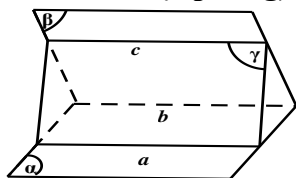


**Định lý 1:** Trong không gian cho đường thẳng  $d$  và điểm  $A$  nằm ngoài  $d$ . Lúc đó tồn tại duy nhất một đường thẳng  $a$  và  $A$  và song song với đường thẳng  $d$ .

Chú ý:

Định lý này cho ta thêm một cách xác định đường thẳng trong không gian: đó là đường thẳng đi qua một điểm và song song với một đường thẳng cho trước không chứa điểm đó. Kết hợp với định lý 2 dưới đây cho ta một cách để xác định giao tuyến của hai mặt phẳng.

**Định lý 2 ( Về giao tuyến của ba mặt phẳng):**



Nếu ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau.

Hệ quả:

Nếu hai mặt phẳng phân biệt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng ( nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.

Đến đây ta có thể bổ sung một phương pháp tìm giao tuyến của hai mặt phẳng:

**Bước 1:** Chỉ ra hai mặt phẳng  $(\alpha), (\beta)$  lần lượt chứa hai đường thẳng song song  $a, b$ .

**Bước 2:** Tìm một điểm chung  $M$  của hai mặt phẳng

**Bước 3:** Khi đó  $(\alpha) \cap (\beta) = Mx // a // b$

### Định lí 3:

Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

Như vậy, cho hai đường thẳng phân biệt thỏa mãn  $\begin{cases} a // b \\ b // c \end{cases} \Rightarrow a // b$

### 3. Góc giữa hai đường thẳng trong không gian

#### a) Định nghĩa

Góc giữa hai đường thẳng  $a$  và  $b$  trong không gian là góc giữa hai đường thẳng  $a'$  và  $b'$  cùng đi qua một điểm và lần lượt song song với  $a$  và  $b$ .

#### b. Phương pháp tính góc giữa hai đường thẳng trong không gian

*Bước 1:* Dựng góc

- Tìm trên hình vẽ xem góc giữa hai đường thẳng có sẵn không?

- Nếu không có sẵn thì ta tiến hành:

+ Chọn một điểm  $O$  bất kì trong không gian.

+ Qua  $O$  dựng đường thẳng  $a' // a, b' // b$ . Góc nhọn hay góc vuông tạo bởi  $a', b'$  chính là góc giữa  $a$  và  $b$ .

*Lưu ý:*

+ Ta thường lấy điểm  $O$  thuộc một trong hai đường thẳng  $a$  và  $b$ .

+ Chọn  $O$  sao cho góc giữa  $a', b'$  là góc của một tam giác mà độ dài các cạnh của nó đã biết hoặc có thể tính dễ dàng

*Bước 2:* Tính góc

Dùng hệ thức lượng trong tam giác, tỉ số lượng giác hay định lí cosin, sin. Trường hợp góc giữa hai đường thẳng  $a$  và  $b$  bằng  $90^\circ$  ta nói  $a \perp b$ .

### III. BÀI TẬP:

#### DẠNG 1. CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN

*Phương pháp chung:* Để chứng minh hai đường thẳng song song trong không gian ta sẽ sử dụng một trong các sách sau:

+ *Cách 1:* Chứng minh hai đường thẳng đồng phẳng, sau đó áp dụng các phương pháp chứng minh song song trong hình học phẳng như tính chất đường trung bình, định lí Thales đảo, tính chất song song của hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ 3...

+ *Cách 2:* Sử dụng tính chất bắc cầu: Chứng minh hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba.

+ *Cách 3:* Áp dụng định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng.

**Ví dụ 1.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $I, J$  lần lượt là trọng tâm của các tam giác  $ABC, ABD$ . Đường thẳng  $IJ$  song song với đường thẳng:

A.  $CM$  trong đó  $M$  là trung điểm  $BD$ .

B.  $AC$ .

C.  $DB$ .

D.  $CD$ .

*Lời giải:*

**Đáp án D.**

**Cách 1:** (Đưa về cùng mặt phẳng và vận dụng kiến thức hình học phẳng)

Gọi  $E$  là trung điểm của  $AB$ . Ta có  $\begin{cases} I \in CE \\ J \in DE \end{cases}$  nên suy ra  $IJ$  và  $CD$  đồng phẳng.

Do  $I, J$  lần lượt là trọng tâm của các tam giác  $ABC, ABD$  nên ta có:  $\frac{EI}{EC} = \frac{EJ}{ED} = \frac{1}{3}$ . Suy ra

$IJ \parallel CD$ .

**Cách 2:** (Sử dụng tính chất bắc cầu)

Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $BD$  và  $BC$ . Suy ra  $MN \parallel CD$  (1).

Do  $I, J$  lần lượt là trọng tâm của các tam giác  $ABC, ABD$  nên ta có:  $\frac{AI}{AN} = \frac{AJ}{AM} = \frac{2}{3}$ . Suy ra

$IJ \parallel MN$  (2).

Từ (1) và (2) suy ra  $IJ \parallel CD$ .

**Cách 3:** (Sử dụng định lí giao tuyến của 3 mặt phẳng).

Có lẽ trong ví dụ này cách này hơi dài, song chúng tôi vẫn sẽ trình bày ở đây, để các bạn có thể hiểu và vận dụng cách 3 hợp lí trong các ví dụ khác.

Để thấy, bốn điểm  $D, C, I, J$  đồng phẳng.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (DCIJ) \cap (AMN) = IJ \\ (DCIJ) \cap (BCD) = CD \\ (AMN) \cap (BCD) = MN \\ MN \parallel CD \end{cases} \Rightarrow IJ \parallel CD \parallel MN.$$

### Ví dụ 2.

Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $Bx, Cy, Dz$  là các đường thẳng song song với nhau lần lượt đi qua  $B, C, D$  và nằm về một phía của mặt phẳng  $(ABCD)$ , đồng thời không nằm trong mặt phẳng  $(ABCD)$ . Một mặt phẳng đi qua  $A$  và cắt  $Bx, Cy, Dz$  lần lượt tại  $B', C', D'$  với  $BB' = 2, DD' = 4$ . Khi đó  $CC'$  bằng:

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

**Lời giải:**

**Đáp án D.**

Gọi  $O$  là tâm của hình bình hành  $ABCD$ .  $I$  là trung điểm của  $B'D'$ .

Do  $Bx, Dz$  song song với nhau nên  $BDD'B'$  là hình thang và  $OI$  là đường trung bình của hình thang đó.

$$\text{Suy ra } IO = \frac{BB' + DD'}{2} = 3.$$

Mặt khác  $OI$  song song với  $CC'$  (vì cùng song song với  $DD'$ ) nên có bốn điểm  $C, C', O, I$  đồng phẳng.

Giao tuyến của hai mặt phẳng  $(AB'D')$  với  $(ACC')$  là  $AC'$ . Lại có  $I$  thuộc  $(AB'D')$ ,  $I$  thuộc  $(ACC')$ .

Do đó  $A, I, C'$  thẳng hàng. Từ đây dễ dàng suy ra,  $I$  là trung điểm đoạn  $AC'$ . Do vậy,  $CC' = 2OI = 6$ .

**Nhận xét:** Ta có bài toán tổng quát cho bài toán này như sau:

Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $At, Bx, Cy, Dz$  là các đường thẳng song song với nhau lần lượt đi qua  $A, B, C, D$  đồng thời không nằm trong mặt phẳng  $(ABCD)$ . Một mặt phẳng cắt  $At, Bx, Cy, Dz$  lần lượt tại  $A', B', C', D'$ . Khi đó  $A'B'C'D'$  là hình bình hành và  $AA' + CC' = BB' + DD'$ .

Do đó khi biết 3 trong 4 đối tượng  $AA', BB', CC', DD'$  ta sẽ dễ dàng tính được đối tượng còn lại.

### Ví dụ 3.

Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$ . Gọi  $At, Bx, Cy, Dz$  là các đường thẳng song song với nhau lần lượt đi qua  $A, B, C, D$  và nằm về một phía của mặt phẳng  $(ABCD)$ , đồng thời không nằm trong mặt phẳng  $(ABCD)$ . Một mặt phẳng  $(\alpha)$  di động cắt  $At, Bx, Cy, Dz$  lần lượt tại  $A', B', C', D'$  sao cho  $AA' + CC' + BB' + DD' = a$  ( $O$  có độ dài cho trước). Mặt phẳng  $(\alpha)$  luôn đi qua điểm cố định  $I$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A.  $I$  nằm trên đường thẳng  $O$  song song với  $At$  và  $OI = \frac{a}{2}$ .

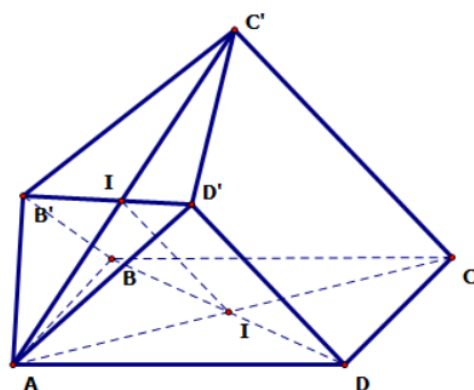
B.  $I$  nằm trên đường thẳng  $O$  song song với  $At$  và  $OI = \frac{a}{4}$ .

C.  $I$  nằm trên đường thẳng  $O$  song song với  $At$  và  $OI = \frac{3a}{2}$ .

D.  $I$  nằm trên đường thẳng  $O$  song song với  $At$  và  $OI = a$ .

**Lời giải:**

**Đáp án B.**



Theo ví dụ 2, ta có :  $AA'+CC' = 2OI = BB'+AA'+CC'+BB'+DD' = a$  nên  $OI = \frac{a}{4}$ .

**Bài tập tương tự:** Cho tam giác  $ABC$ . Ở về một phía của  $(ABC)$ , người ta kẻ các đường thẳng song song  $Ax, By, Cz$ . lần lượt lấy trên  $Ax, By, Cz$  các điểm  $A', B', C'$ .

- $M$  và  $M'$  lần lượt là trung điểm  $AB, A'B'$ . Chứng minh rằng  $MM'$  song song với  $CC'$ .
- $G$  và  $G'$  lần lượt là trọng tâm của tam giác  $ABC$  và  $A'B'C'$ . Chứng minh rằng  $GG'$  song song với  $CC'$ .

**Ví dụ 4.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Các điểm  $M, N$  thứ tự thuộc các đoạn  $BC$  và  $SD$

sao cho  $\frac{MB}{MC} = \frac{NS}{ND} = \frac{1}{2}$ . Gọi  $I$  là giao điểm của  $MD$  và  $AB$ .

- Chứng minh rằng  $MN // SI$ .
- Qua  $M$  kẻ  $MN // CD$  ( $P$  là điểm trên  $BD$ ). Chứng minh rằng  $MP // SB$ .

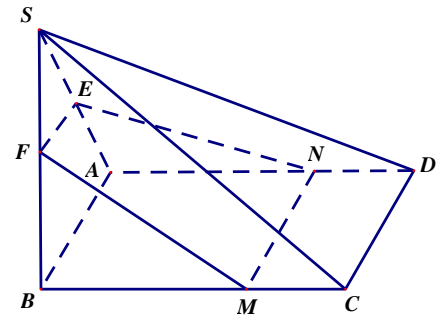
**Lời giải:**

a) Ta có  $BI // CD \Rightarrow \frac{IM}{MD} = \frac{MB}{MC} = \frac{1}{2}$

Trong tam giác  $SDI$  có  $\frac{SN}{ND} = \frac{IM}{MD} \left( = \frac{1}{2} \right) \Rightarrow MN // SI$ .

b) Ta có  $MP // AB \Rightarrow \frac{BP}{PD} = \frac{MB}{MC} = \frac{1}{2}$

Trong tam giác  $SBD$  có  $\frac{BP}{PD} = \frac{SN}{ND} = \frac{1}{2} \Rightarrow NP // SB$ .



**DẠNG 2. TÌM GIAO TUYẾN CỦA HAI MẶT PHẪNG (cách 2). THIẾT DIỆN QUA MỘT ĐƯỜNG THẲNG VÀ SONG SONG VỚI MỘT ĐƯỜNG THẲNG CHO TRƯỚC.**

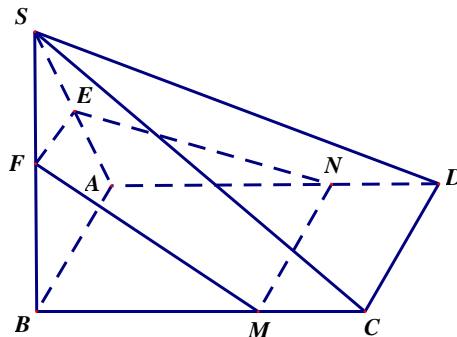
- **Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (cách 2)**  
 Để tìm giao tuyến của hai mặt phẳng chứa hai đường thẳng  $a$  và  $b$  song song, ta tìm:  
 + Một điểm chung của hai mặt phẳng đó.  
 + Giao tuyến của hai mặt phẳng là đường thẳng qua điểm chung và song song với  $a$  và  $b$  ( hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó).

**Ví dụ 1.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật.  $SA = SB = a, SC = SD = a\sqrt{3}$ .

Gọi  $E, F$  lần lượt là trung điểm của  $SA$  và  $SB$ .  $M$  là điểm tùy ý trên cạnh  $BC$  ( không trùng với  $B, C$  )

- Xác định giao tuyến của các mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SCD)$ ;  $(SAD)$  và  $(SBC)$ .
- Xác định giao tuyến của các mặt phẳng  $(MEF)$  và  $(ABCD)$ . Từ đó suy ra giao điểm  $N$  của  $AD$  và  $(MEF)$ . Chứng minh rằng  $MNEF$  là hình thang cân.

**Lời giải:**



a) Ta có  $\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ AB // CD, AB \subset (SAB), CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = Sx // AB // CD$ .

Tương tự  $\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SBC) \\ AD // BC, AD \subset (SAD), BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow (SAD) \cap (SBC) = Sy // AD // BC$ .

b) Do  $E, F$  lần lượt là trung điểm của  $SA, SB$  nên  $EF$  là đường trung bình của tam giác  $SAB$ . Do đó

$$EF // AB, EF = \frac{1}{2} AB \quad (1)$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} EF // AB, EF \subset (MEF), AB \subset (ABCD) \\ M \in (MEF) \cap (ABCD) \end{cases} \Rightarrow (MEF) \cap (ABCD) = Mt // AB // CD \quad (2)$$

Gọi  $N$  là giao điểm của  $Mt$  với  $AD$ . Ta có:

$$\begin{cases} N \in Mt, Mt \subset (MEF), AB \subset (ABCD) \\ M \in AD \end{cases} \Rightarrow \{N\} = AD \cap (MEF).$$

Từ (1) và (2) suy ra  $EF // MN, EF = \frac{1}{2} AB < MN$ . Suy ra  $MNEF$  là hình thang.

Để thấy  $\Delta SAD = \Delta SBC$  (c.c.c)  $\Rightarrow SAD = SBC \Rightarrow \Delta EAN = \Delta FBM$  (c.g.c)  $\Rightarrow FM = EN$  vậy  $MNEF$  là hình thang cân.

Thiết diện qua một đường thẳng và song song với một đường thẳng cho trước  
Được xác định bằng cách phối hợp hai cách xác định giao tuyến đã biết:

**Cách 1:** Tìm hai điểm chung của hai mặt phẳng.

**Cách 2:** Tìm một điểm chung và phương ( song song với một đường thẳng cho trước) của giao tuyến.

### Ví dụ 2.

Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $AC$ , Gọi  $E$  là điểm trên cạnh  $CD$  với  $ED = 3EC$ . Thiết diện tạo bởi mặt phẳng  $(MNE)$  và tứ diện  $ABCD$  là:

**A.** Tam giác  $MNE$ .

**B.** Tứ giác  $MNEF$  với  $F$  là điểm bất kì trên cạnh  $BD$ .

**C.** Hình bình hành  $MNEF$  với  $F$  là điểm bất kì trên cạnh  $BD$  mà  $EF // BC$ .

**D.** Hình thang  $MNEF$  với  $F$  là điểm bất kì trên cạnh  $BD$  và  $EF // BC$ .

**Lời giải:**

Trong mặt phẳng  $(BCD)$ , Gọi  $F$  là giao điểm của đường thẳng qua  $E$ , song song  $BC$  với  $BD$ .

$$\text{Ta có } \begin{cases} (MNE) \cap (ABC) = MN; (MNE) \cap (BCD) = EF \\ (MNE) \cap (ABD) = MF; (MNE) \cap (ACD) = NE \end{cases}$$

Vậy tứ giác  $MNEF$  là thiết diện của hình chóp cắt bởi  $(MNE)$ .

$$\text{Lại có } \begin{cases} (MNE) \cap (ABC) = MN \\ (MNE) \cap (BCD) = EF \\ (MCD) \cap (ABC) = BC \\ BC // MN \end{cases} \Rightarrow EF // MN.$$

Suy ra tứ giác  $MNEF$  là hình thang ( $EF > MN$ ).

### Ví dụ 3.

Cho hình chóp  $S.ABCD$ , đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Gọi  $M$  là trung điểm của  $SA$ . Thiết diện của mặt phẳng  $(MCD)$  với hình chóp  $S.ABCD$  là hình gì?

**A.** Tam giác.

**B.** Hình bình hành.

**C.** Hình thang.

**D.** Hình thoi.

**Lời giải:**

**Đáp án C.**

Gọi  $N$  là trung điểm của  $SB$ . Do  $MN // AB, AB // CD \Rightarrow MN // CD$ .

Như vậy suy ra  $N$  thuộc mặt phẳng  $(MCD)$ .

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (MCD) \cap (SAD) = MD \\ (MCD) \cap (SAB) = MN \\ (MCD) \cap (SBC) = NC \\ (MCD) \cap (ABCD) = CD \end{cases}$$

Vậy tứ giác  $MNCD$  là thiết diện của hình chóp bị cắt bởi mặt phẳng  $(MCD)$ .

Kết hợp với  $MN // CD$ , suy ra  $MNCD$  là hình thang.

### DẠNG 3: GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

**Ví dụ 1.** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AB = CD = a$ ,  $AC = BD = b$ ,  $AD = BC = c$ . Xét các khẳng định sau:

- Cosin của góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$  bằng  $\frac{|b^2 - c^2|}{a^2}$ .
- Cosin của góc giữa hai đường thẳng  $AC$  và  $BD$  bằng  $\frac{|a^2 - c^2|}{b^2}$ .
- Cosin của góc giữa hai đường thẳng  $AD$  và  $BC$  bằng  $\frac{b^2 - a^2}{c^2}$ .

Trong các khẳng định trên có bao nhiêu khẳng định đúng?

- A.** 0.                      **B.** 1.                      **C.** 2.                      **D.** 3.

**Lời giải:**

**Đáp án C.**

Gọi  $E, F, G$  lần lượt là trung điểm của  $AC, BC, AD$ .

Ta có:  $EF // AB, EG // CD$ , suy ra góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$ .

$$\text{Ta có: } AF^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$

Do  $\triangle ABC = \triangle DBC$  (c.c.c) nên  $AF = DF$ .

Suy ra  $\triangle AFD$  cân tại  $F$ .

$$FG \perp AD \Rightarrow FG = \sqrt{FA^2 - AG^2} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}}.$$

Xét tam giác  $EFG$

$$\cos FEG = \frac{EF^2 + EG^2 - FG^2}{2EF \cdot EG} = \frac{c^2 - b^2}{a^2}.$$

$$\text{Vì } 0^\circ \leq (\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EG}) \leq 90^\circ \Rightarrow \cos(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EG}) = |\cos FEG| = \frac{|b^2 - c^2|}{a^2}.$$

Vậy cosin của góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$  bằng  $\frac{|b^2 - c^2|}{a^2}$ .

Tương tự ta cũng suy ra cosin của góc giữa  $AC$  và  $BD$  bằng  $\frac{|a^2 - c^2|}{b^2}$ .

**Nhận xét:** Từ ví dụ này, ta còn suy ra được một trong ba giá trị  $a^2 \cos(AB, CD)$ ;  $b^2 \cos(AC, BD)$ ;  $c^2 \cos(AD, BC)$  bằng tổng hai giá trị còn lại. Cũng từ ví dụ này ta còn suy ra được với tứ diện đều  $ABCD$  thì góc giữa các cặp cạnh đối diện luôn bằng  $90^\circ$

#### IV. Nội dung chuẩn bị:

*HS cần xem kỹ lý thuyết SGK trước khi tham khảo phần lý thuyết tóm lược và bài tập.*

#### V. Đáp án bài tập tự luyện:

*Nếu có thắc mắc HS liên hệ GVBM để được hỗ trợ.*

